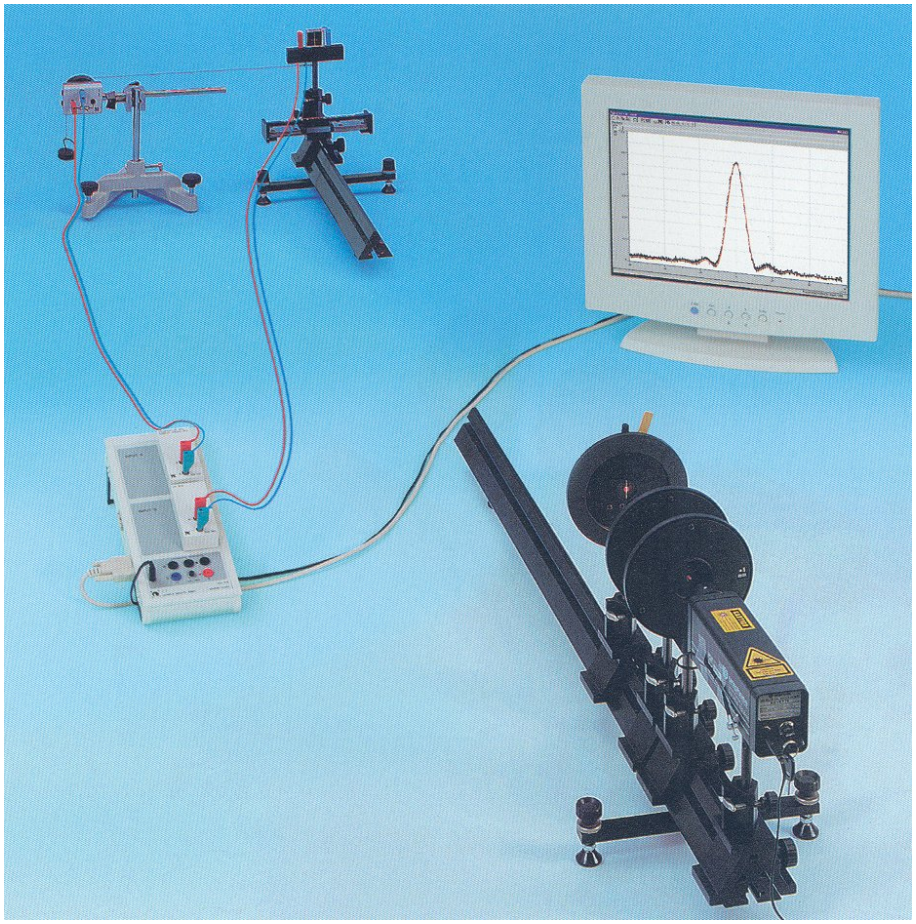
Anfängerpraktikum Physik
Teil II
RWTH Aachen
I. Physikalisches Institut B

Prof. Dr. W. Braunschweig, Prof. Dr. K. Eggert, Prof. Dr. L. Feld,
Dr. S. Fopp, Dr. Th. Kirn, Dr. K. Klein, Dr. S. König,
Priv. Doz. Dr. W. Krenz, Dr. A. Ostaptchouk, Dr. D. Pandoulas,
Prof. Dr. F. Raupach, Prof. Dr. St. Schael, Dr. G. Schwering,
Dr. Th. Siedenburg, Prof. Dr. W. Wallraff



http://www.physik.rwth-aachen.de/phys1b/∼kirn/praktikum
Version vom 26.07.2004

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung **4**
- 0.1 Arbeitsablauf . . . 6
- 0.2 Benutzung der Notebooks . . . 7
- 0.3 Versuchsvorbereitung . . . 7
- 0.4 Bewertung . . . 8
- 0.5 Zeitlicher Ablauf . . . 8

1 Wellen **9**
- 1.1 Versuchsziele . . . 9
- 1.2 Grundlagen . . . 9
- 1.3 Versuche mit Ultraschall . . . 14
  - 1.3.1 Versuchsaufbau . . . 14
  - 1.3.2 Versuchsdurchführung . . . 15
- 1.4 Versuche mit elektromagnetischen Mikrowellen . . . 22
  - 1.4.1 Versuchsaufbau . . . 22
  - 1.4.2 Versuchsdurchführung . . . 24

2 Optik **32**
- 2.1 Geometrische Optik & Beugung . . . 32
  - 2.1.1 Physikalische Grundlagen in Stichworten . . . 32
  - 2.1.2 Versuchsziele . . . 32
  - 2.1.3 Messwerteerfassung . . . 35
  - 2.1.4 Beobachtungsprogramm . . . 37
  - 2.1.5 Sicherheitshinweis . . . 40
  - 2.1.6 Literatur . . . 41
- 2.2 Spektrometer . . . 43
  - 2.2.1 Prismenspektrometer . . . 43
  - 2.2.2 Gitterspektrometer . . . 58

3 Halbleiter **68**
- 3.1 Halbleitereigenschaften und Hall–Effekt . . . 68
  - 3.1.1 Theoretische Grundlagen . . . 69
  - 3.1.2 Versuchsaufbau und Durchführung . . . 76
  - 3.1.3 Auswertung . . . 84
- 3.2 Leitungseigenschaften und Kennlinien von Halbleitern . . . 85

3.2.1 Theoretische Grundlagen 85
3.2.2 Versuchsaufbau und Durchführung 91
3.2.3 Auswertung 95

4 Elektrizitätslehre **97**
4.1 Grundlagen, Definitionen 98
4.2 Wechselstromwiderstände 100
4.2.1 Ohmscher Widerstand 100
4.2.2 Kapazitiver Widerstand 103
4.2.3 Induktiver Widerstand 107
4.3 Wechselstromschwingkreise 111
4.3.1 Serienschwingkreis von L, R und C 111
4.3.2 Parallelschwingkreis von L, R und C 118

Kapitel 0

Einleitung

In dem Anfängerpraktikum für Physiker und Mathematiker sollen die Studenten moderne Arbeitsmethoden in der Physik kennen- und anwenden lernen. Dabei sollen folgende Kompetenzen erworben werden:

- Anwendung physikalischen Wissens aus den Vorlesungen
- Aufbau eines Experimentes
- Computerunterstützte Messung und Auswertung
- Präsentation der Ergebnisse
- Arbeiten in der Gruppe

Die Studenten sollen sich intensiv mit dem Versuch, dem physikalischen Hintergrund, den Messmethoden und der Auswertung der Daten auseinandersetzen. Für jeden Versuch stehen daher 2,5 Tage zur Verfügung.

Das Praktikum wird wie folgt gegliedert:

- Die Studenten erarbeiten insgesamt vier Versuche in vier Wochen aus den Arbeitsgebieten: Elektrizitätslehre, Halbleiter, Optik und Wellenlehre.
- Der Stoff orientiert sich an der Vorlesung.
- Eine Arbeitsgruppe besteht aus vier Studenten und einem Tutor. Jeder Tutor betreut einen Versuch während der vier Wochen und jeweils zwei Arbeitsgruppen gleichzeitig.
- Maximal vier Arbeitsgruppen arbeiten in einem Raum unter der Betreuung von zwei Tutoren.

Zu Beginn des Praktikums gibt es eine zweitägige (im WS eintägige) Veranstaltung, in der den Studenten Grundkenntnisse in Fehlerrechung (Statistik) und in Gerätekunde vermittelt werden. Diese Lehrveranstaltungen sind kombinierte Vorlesungen und Übungen.

Für jeden der Versuche gibt es einen oder zwei verantwortliche Physiker am I. Physikalischen Institut, an die sich die Studenten mit Problemen, Fragen und Anregungen zur Versuchsbeschreibung oder Durchführung wenden können (siehe Tabelle 1).

Versuch	Name	Telefon 802-	Raum 28-	Name	Telefon 802-	Raum 28-
1. Wellen						
1.1 Ultraschallwellen	Dr. Th. Siedenburg	7186	B203			
1.1 Mikrowellen	Dr. G. Schwering	7202	C208			
2. Optik						
2.1 Beugung & Geom. Optik	Prof. W. Wallraff	7187	B208	Dr. A. Ostaptchouk	7182	B209
2.2 Spektrometer	Prof. W. Wallraff	7187	B208	Dr. A. Ostaptchouk	7182	B209
3. Halbleiter						
3.1 Halleffekt	Prof. W. Braunschweig	7180	A212	Dr. K. Klein	7205	C203
3.2 Kennlinien	Prof. W. Braunschweig	7180	A212	Dr. K. Klein	7205	C203
4. Elektrizitätslehre						
4.1 Wechselstromwiderstände	Dr. Th. Kirm	7186	B203	Dr. W. Krenz	7206	A214
4.2 Wechselstromschwingkreise	Dr. Th. Kirm	7186	B203	Dr. W. Krenz	7206	A214

Tabelle 1: Verantworliche Physiker für die Versuche im Anfängerpraktikum Physik, Teil II.

0.1 Arbeitsablauf

Das Praktikum wird im Wintersemester (Sommersemester) für 192 (32) Studenten ausgelegt, die in 48 (8) Arbeitsgruppen A01-A16 (A01-A04), B01-B16 (B01-B04) und C01-C08 eingeteilt werden. Die A- und B-Gruppen sind vormittags (von 08:30 Uhr bis 13:00 Uhr) im Wechsel und die C-Gruppen nachmittags (von 14:00 Uhr bis 18:30 Uhr) jeweils drei Tage aktiv und bereiten einen Tag die Versuche vor.

- 1. Tag:
  Besprechung mit dem Tutor, Erarbeitung eines geeigneten Versuchsaufbaus. Versuchsaufbau, incl. Inbetriebnahme aller für die Messung erforderlicher Geräte und Computer. Pro Arbeitsgruppe sollen zwei Versuchsaufbauten in Betrieb genommen werden, die identisch oder unterschiedlich sein können, je nach Fragestellung. Die Messdaten werden aufgezeichnet und die Auswertung soweit durchgeführt, dass erste, vorläufige Ergebnisse diskutiert werden können.

- 2. Tag:
  Die Auswertung der Versuche wird im CIP-Pool der Physik oder auf eigenen Computern zu Hause weitergeführt und abgeschlossen. Das Protokoll und die Abschlusspräsentation werden von der Arbeitsgruppe gemeinsam erarbeitet.

- 3. Tag:
  Die Arbeitsgruppe gibt direkt zu Beginn ein Protokoll ab, welches die Messergebnisse beider Versuchsaufbauten beschreibt und vergleicht. Die Tutoren lesen und bewerten das Protokoll. Im Anschluß werden die Versuchsergebnisse in den Arbeitsgruppen präsentiert und diskutiert. Die Präsentation erfolgt für die maximal vier Arbeitsgruppen, die an dem gleichen Arbeitsgebiet (Wellenlehre, Optik, Halbleiter, E.-Lehre) experimentiert haben, zusammen in einem Raum. Die beiden betreuenden Tutoren wählen aus allen Präsentationen die für ihren Versuch Beste aus.

Die Studenten wählen aus, welchen Versuch aus einem Arbeitsgebiet sie durchführen wollen. Dies ist natürlich nur in dem Umfang möglich, wie es die vorhandenen Versuchsaufbauten zulassen. Die Studenten müssen sich daher auf alle Versuche eines Arbeitsgebietes vorbereiten.

Das Praktikum wird mit einem Kolloquium und der Vorstellung der besten Präsentationen durch die Arbeitsgruppen für jeden Versuch am Ende der vier Wochen abgeschlossen. Die Abschlusspräsentationen sollen den Studenten noch einmal eine Wiederholung der Lehrinhalte des Praktikums ermöglichen und damit eine gute Vorbereitung auf das abschliessende Kolloquium sein. Alle Studenten wählen am vorletzten Tag aus diesen Präsentationen die Beste aus. Dieser Student und die punktbeste Arbeitsgruppe werden mit einem Sachpreis ausgezeichnet.

Jeder Student aus einer Gruppe muss in den vier Wochen mindestens einmal:

- einen Versuch aufgebaut haben,
- die Ergebnisse der Gruppe präsentiert haben und.
- ein Protokoll auf dem Computer erstellt haben.

0.2 Benutzung der Notebooks

Für die Durchführung der Versuche erhält jede Arbeitsgruppe 2 Notebooks. Diese stehen nur für die Arbeiten im Praktikum zur Verfügung und können nicht mit nach Hause genommen werden. Täglich wechseln die Notebooks zwischen A- und B-Gruppen. Auf den Notebooks läuft als Betriebssystem Windows XP und UNIX. An Software ist das CASSY-Messwerterfassungssystem (siehe http://www.leybold-didactic.de), das OpenOffice 1.1.0 und das Numerik-Programm Maple 9.0 installiert. Weiterhin steht eine Digitalkamera zur Verfügung, um die Versuchsaufbauten zu dokumentieren. Protokolle und Präsentationen sollten mit OpenOffice 1.1.0 erstellt werden. Die statistischen Auswertungen der Versuche (Mittelwerte, lineare Regression, etc.) sollen mit MAPLE durchgeführt werden.

Die Studenten haben nur Schreibzugriff auf den User-Bereich. Als ersten Arbeitsschritt legt jeder Student, sobald er ein Notebook erhält, im User-Bereich ein Verzeichnis mit seinem Namen an. In diesem Verzeichnis sollten alle Dateien, die zu dem Versuch gehören, abgespeichert werden und am Ende der eintägigen Arbeitsphase auf Disketten oder USB-Memory-Sticks überspielt werden. Der User-Bereich wird bei jedem Wechsel zwischen A- , B- und C-Gruppen gelöscht, so dass alle ungesicherten Daten unwiederbringlich verloren sind.

Alle Notebooks sind über ein WLAN vernetzt und haben somit auch Zugang zum Internet. Alle Versuchsergebnisse können über scp zum CIP-Pool Bereich oder nach Hause überspielt werden. Eine ssh Verbindung (Programm Putty) zu dem CIP-Pool können die Studenten herstellen.

Für Experten sind auf den Notebooks zusätzlich die Programmpakete LATEX (TEXnicCenter, Textverarbeitung) und GHOSTSCRIPT/GHOSTVIEW (Verarbeitung von Post-Script-Dateien) installiert. Es steht die Texteditoren GVIm und XEmacs zur Verfügung, um eigene C-Programme zu erstellen. Mit dem Grafikprogramm GIMP können die Bilder von der Digitalkamera bearbeitet werden und Screen-Shots erstellt werden. Zusätzlich sind für einige Versuche spezielle Programme installiert (z.B. Digitaloszilloskope) die in den Anleitungen näher erläutert sind.

0.3 Versuchsvorbereitung

Die Versuchsbeschreibungen sollen den Studenten eine qualifizierte Vorbereitung auf den Versuch ermöglichen und eine Anleitung für die Versuchdurchführung sein. Die physikalischen Grundlagen zu den Versuchsthemen werden in den Versuchsanleitungen nur bedingt hergeleitet. Es ist daher unerlässlich, entsprechende Physikbücher für die Vorbereitung zu verwenden. Besonders geeignet sind die folgenden Bücher:

- W. Walcher, "Praktikum der Physik", Teubner Taschenbuch.
- Demtröder, "Experimentalphysik", Band 1 und 2.
- P.A. Tipler, "Physik", Spektrum Verlag.
- Gerthsen, Kneser, Vogel, "Physik", Springer Verlag

0.4 Bewertung

Die erbrachten Leistungen werden für jeden Versuch durch die Tutoren im Rahmen eines Punktesystems testiert. Dabei werden die verschiedenen Arbeitsschritte mit 0, 2, 4, 6, 8 oder 10 Punkten beurteilt. Bei der Durchführung des Versuches wird jeder Student individuell durch den Betreuer bewertet. Für das Protokoll erhält jeder Student der Gruppe dieselbe Punktzahl. Die Präsentation wird für denjenigen Studenten einer Gruppe gewertet, der die Präsentation vorträgt. Sie wird doppelt gewertet, also mit 0, 4, 8, 12, 16 oder 20 Punkten. Ein Student kann somit maximal 100 Punkte in dem Praktikum erreichen, 51 Punkte sind mindestens erforderlich um zum abschliessenden Kolloquium zugelassen zu werden. Wer mindestens 81 Punkte erreicht, braucht an dem Kolloquium nicht mehr teilzunehmen. Die Studenten, die am Tag vor dem Kolloquium eine der Abschlusspräsentationen gehalten haben, brauchen an dem Kolloquium ebenfalls nicht mehr teilzunehmen.

In besonderen Härtefällen entscheidet der zuständige Praktikumsleiter über die Zulassung zum Kolloquium. Wird das Kolloquium nicht bestanden, kann es einmal wiederholt werden. Wird auch das zweite Kolloquium nicht bestanden, muss das Praktikum wiederholt werden.

Studenten die mehr als einmal nicht auf einen Versuch vorbereitet sind, müssen das Praktikum wiederholen. Aus Krankheitsgründen kann ein Student bei einem Versuch entschuldigt fehlen (ärztliches Attest muss vorgelegt werden), bei zwei Versuchen muss das Praktikum wiederholt werden.

Studenten die ihre Versuchsergebnisse, Protokolle oder Präsentationen nicht selber erarbeiten sondern abschreiben, werden von dem Praktikum unverzüglich ausgeschlossen.

0.5 Zeitlicher Ablauf

Das Praktikum beginnt mit der Einführungsveranstaltung und endet mit der Abschlussbesprechung und dem Kolloquium. Der zeitliche Ablauf des Praktikums, die Raumeinteilung, sowie die Einteilung der Studenten in die Arbeitsgruppen wird gesondert bekannt gegeben. Die Einteilung der Studenten in das Kolloquium wird in der Abschlussbesprechung bekannt gegeben.

Das Praktikum ist von 08:30 Uhr bis 18:30 Uhr für die Studenten geöffnet.

Kapitel 1

Wellen

1.1 Versuchsziele

Vorbemerkung: Die Versuchsbeschreibung befasst sich hauptsächlich mit den in diesem Versuch zu messenden Phänomenen und behandelt deswegen nur deren Hintergrund. Zum Verständnis des Versuches ist aber oft auch die Kenntnis des gesamten Hintergrundes (z.B. die Herleitung der Wellengleichung) von Nöten. In dieser Anleitung werden einige Aufgaben gestellt, deren Lösen bei der Vorbereitung auf den Versuch hilfreich sind.
Vorsicht: Selbst in einigen guten Lehrbüchern sind gewisse Herleitungen und Aussagen (z.B. die Eulerschen Gleichungen, Lage der Maxima bei Einzelspalt) nicht richtig niedergeschrieben.

Es werden unterschiedliche Phänomene von Zentimeterwellen untersucht. Die Messungen werden entweder mit Ultraschallwellen ($\lambda \approx 1cm$) oder mit elektromagnetischen Mikrowellen ($\lambda \approx 3cm$) durchgeführt. Es stehen jeweils 4 Aufbauten zur Verfügung, und es empfiehlt sich, die Gruppenaufteilung vorab zu koordinieren.
Vorversuche zum Versuchsaufbau sind Kalibration der Strecken-, Winkel- und Intensitätsmessung. Danach folgen die Hauptmessungen:

- Bestimmung der Wellenlänge
- Beugungs- und Interferenzeffekte an Spalten
- Brechungs-, Reflexions- und Polarisationsphänomene

1.2 Grundlagen

Kenntnisse: Wellengleichung mit Herleitung für Schall und elektromagnetische Wellen, Kugelwellen, ebene Wellen, Intensität, Überlagerung, Beugungs-, Brechungs- und Polarisationsphänomene

Wellen sind Störungen einer Feldgröße $a(\vec{x}, t)$, die sich in Raum und Zeit fortschreiten. Bei ungedämpfter Ausbreitung werden sie durch folgende Wellengleichung beschrieben:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} a(\vec{x}, t) = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) a(\vec{x}, t) \tag{1.1}$$

Im Falle von **Schallwellen** sind die Feldgrößen der Schalldruck p und die Schallschnelle u. Da der Schalldruck eine skalare Größe ist und die Schallschnelle in Ausbreitungsrichtung liegt, handelt es sich bei Schall in Gasen um longitudinale Wellen. Grundlagen für die Herleitung der Wellengleichung und die funktionalen Zusammenhänge sind die Eulerschen Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}p(x,t) = -\varrho\ \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = -\frac{1}{\kappa p_0}\ \frac{\partial}{\partial t}p(x,t) \tag{1.2}$$

mit Außendruck p_0, Adiabatenexponent $\kappa = c_P/c_V$, und Gasdichte ϱ.

Im Gegensatz dazu sind **elektromagnetische Wellen** transversal. Die Feldgrößen sind das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{H}$, welche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen. Grundlagen der Wellengleichung sind die Maxwellschen Gleichungen:

$$div\vec{D} = \rho, \qquad div\vec{B} = 0, \qquad rot\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}, \qquad rot\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \vec{j} \tag{1.3}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{M}, \qquad \text{bzw. in isotropen Medien} \quad \vec{D} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$$

ϵ_0 ist die Influenz-, μ_0 die Induktionskonstante des Vakuums. ϵ_r ist die relative Dielektrizität und μ_r die relative Permeabilität des Mediums. Im Vakuum – ohne polarisierbares oder magnetisierbares Medium – ist die Polarisation $\vec{P} = 0$ und die Magnetisierung $\vec{M} = 0$, also $\epsilon_r = \mu_r = 1$. Außerdem gibt es keine freien Ladungen und Stromdichten, d.h. $\varrho = 0$ und $\vec{j} = 0$.

Aufgabe: Man zeige, daß die Phasengeschwindigkeit c folgendermaßen von den Eigenschaften des Mediums abhängt:

$$c_{Schall,Gas} = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho}}, \qquad c_{e.m.Welle} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r}} \tag{1.4}$$

Tip: Für eine Feldgröße die Wellengleichung aus den Euler- bzw. Maxwellgleichungen ableiten.

Allgemeine Lösungen der Wellengleichung 1.1 sind:
a) Ebene Wellen, die sich – senkrecht zu einer Ebene – in eine Raumrichtung ausbreiten:

$$a(\vec{x},t) = a_0 \cdot f(\frac{\vec{c}\cdot\vec{x}}{c} \pm c\cdot t) \tag{1.5}$$

b) Kugelwellen, die sich – ausgehend von Punktquellen – in den Raum ausbreiten:

$$a(r,t) = a_0 \cdot \frac{r_0}{r} f(r \pm c\cdot t) \qquad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = |\vec{x}| \tag{1.6}$$

Für die Intensität $I := P/A$ einer Welle gilt allgemein: $\quad I \sim a^2$

Harmonische ebene Wellen sind eine spezielle Lösung der Wellengleichung 1.1:

$$a(x,t) = a_0 \cdot \sin(\omega t \pm kx + \varphi) \qquad \text{Kreisfrequenz } \omega = 2\pi f \quad \text{Kreiswellenzahl } k = 2\pi/\lambda \tag{1.7}$$

Die Phasengeschwindigkeit c (hier in Richtung der x-Achse) steht mit der Wellenlänge λ und der Frequenz f in folgendem Zusammenhang:

$$c = \omega/k = f \cdot \lambda \tag{1.8}$$

Ohne Dispersion ist c unabhängig von ω und gleich der Gruppengeschwindigkeit $c_{gr} = \partial\omega/\partial k$.

Aufgabe: Die Schallwellen werden mit einem Piezo-Kristall, die Mikrowellen mittels einer Gunn-Diode erzeugt. In welchem Frequenzbereich werden diese Bauteile hier betrieben?

Die Phasenlage φ und die Amplitude a_0 werden durch die Anfangsbedingungen, die die Lösung erfüllen muß, bestimmt. Die Anfangsbedingungen werden durch den jeweiligen Aufbau bestimmt, z.B. durch weiche oder harte Reflexionswände, etc. Während die Phasenlage bei gewissen Untersuchungen keine Auswirkung hat (z. B. bei der Abstandsabhängigkeit der Intensität einer Kugelwelle), spielt sie bei Interferenzen die entscheidende Rolle.
Erreichen mehrere Wellen einen Ort im Raum, so wird die Gesamtwirkung durch die Addition der Einzelamplituden bestimmt. Diese Superposition führt z.B. zu stehenden Wellen vor Reflektoren, Beugungsmustern an Einzel- und Mehrfachspalt, etc.
In diesem Versuch sollen mehrere Phänomene von Wellen untersucht werden. Im Folgenden werden kurz die wichtigsten Formeln gegeben, die für eine Auswertung der Versuche notwendig sind. Auf eine Herleitung wird hier verzichtet.

Die **stehende Welle** ist die einfachste Form der Überlagerung von Wellen.
Trifft eine ebene harmonische Welle auf einen geeigneten Reflektor, so überlagern sich die einfallende und die reflektierte zu einer stehenden Welle.
Aufgabe: Man zeige durch Superposition, daß für u bzw. $|\vec{E}|$ gilt:

$$a(x,t) = 2a_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(kx) \qquad \text{mit Reflektor bei } x = 0 \tag{1.9}$$

Tip: Die Phasendifferenz zwischen ein- und auslaufender Welle ergibt sich aus der Randbedingung für $u(x = 0, t)$ bzw. $|\vec{E}|(x = 0, t)$ am passenden Reflektor.

Die zeitlichen und räumlichen Periodizitäten sind entkoppelt, und es gibt Orte (sog. Knoten), an denen zu jeder Zeit $a(x) = 0$ ist. Diese Positionen haben einen Abstand von $\lambda/2$ zueinander, und mit ihrer Messung wird die Wellenlänge bestimmt.

Beugung Trifft eine ebene Welle senkrecht auf ein Gitter äquidistanter Spalte im Abstand d zueinander, mit gleicher Einzelspaltbreite b, so ergibt sich aus der Superposition der Einzelwellen mit unterschiedlicher Phasenlage $\Delta\varphi = \Delta \cdot k$ hinter dem Gitter ein Beugungsbild. Die nebenstehende Abbildung illustriert den Gangunterschied Δ für zwei einlaufende Wellenzüge.
Bei großen Empfängerabständen $r_0 \gg d^2/\lambda$ ist die Fraunhofer-Näherung zulässig.

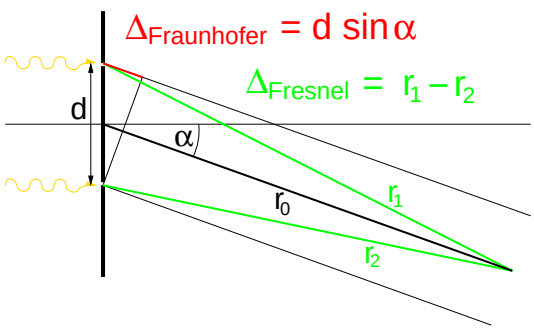


Abbildung 1.1: Fraunhofer-Näherung

Unter dem Winkel α zur Einfallsrichtung ergibt sich in Fraunhofer-Näherung:

$$I(\alpha) = I_0 \cdot \left[\frac{\sin(\pi \frac{b}{\lambda} \sin\alpha)}{\pi \frac{b}{\lambda} \sin\alpha}\right]^2 \cdot \left[\frac{\sin(N\pi \frac{d}{\lambda} \sin\alpha)}{\sin(\pi \frac{d}{\lambda} \sin\alpha)}\right]^2 \tag{1.10}$$

Der erste Term beschreibt die Einhüllende, die durch die Beugung am Einzelspalt zustande kommt, der zweite Term die Interferenz durch die N bestrahlten Spalten.

Aufgabe: Folgende Extremwerte sind ohne numerische Näherung berechenbar:

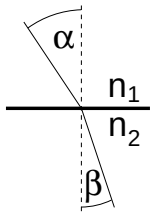
$$\text{Einzelspalt Minima:} \qquad \sin\alpha_n = n \cdot \lambda/b \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1.11}$$

$$\text{N-fachspalt Maxima:} \qquad \sin\alpha_m = m \cdot \lambda/d \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{1.12}$$

Brechung Wellen werden beim Übergang von verschieden dichten Materialien wie in nebenstehender Abbildung gebrochen. Es gilt das Gesetz von Snellius:

$$n_1 \cdot \sin\alpha = n_2 \cdot \sin\beta \qquad \text{mit} \qquad n_i = c_{vakuum}/c_i \tag{1.13}$$

Im Medium i mit Brechungsindex n_i ist die Phasengeschwindigkeit c_i.



Polaristion Transversale Wellen können mit geeigneten Hilfsmitteln polarisiert werden. Im Allgemeinen ist eine 'Einzelwelle' elliptisch polarisiert, mit den beiden Extremfällen zirkularer und linearer Polarisation. Bei linear polarisierten Wellen kann durch Polarisationsfilter die Schwingungsebene quasi gedreht werden und die Intensität sinkt gemäß dem Gesetz von Malus:

$$I(\alpha) = I_0 \cdot \cos^2\alpha \tag{1.14}$$

α ist hier der Winkel zwischen den Polarisationsebenen der einfallenden Welle und des Polarisators.
Elektromagnetische Wellen sind transversal und somit polarisierbar. Beim Abstrahlen der Welle von einer ortsfesten Antenne liegt die Schwingungsebene in der Ausdehnungsrichtung des Antennendipols, im benutzten Aufbau der Gunn-Diode.
Aufgabe: Ist auch der Empfänger eine zum Sendedipol parallel stehende Dipolantenne, so wirkt er als Analysator ebenfalls polarisierend. Man zeige anhand geeigneter Orthogonal-Zerlegung der Feldvektoren, daß sich dann folgender Intensitätsverlauf ergibt: $I(\alpha) = I_0 \cdot \cos^4\alpha$.

Kalibration des Weg- bzw. Winkelaufnehmers Bei diesen Vesuchen werden in fast allen Fällen Signalstärken gegen Strecken oder Winkel aufgezeichnet. Zur Orts- und Winkelmessung wird ein Mehrgang-Drehpotentiometer verwendet, dessen gemessener Widerstand in eine Strecke bzw. einen Winkel umgerechnet werden muß. Wegen der Bauteiletoleranz solcher Potentiometer im Prozentbereich muß der Weg- bzw. Winkelaufnehmer in einem Vorversuch kalibriert werden. Dazu werden die mit dem Bandmaß gemessenen Orte S bzw. an dem Drehtisch abgelesene Winkel gegen den Widerstand Rb1 des Potentiometers wie in Abb. 1.2 aufgezeichnet. Bei

äquidistanten Kalibrationspunkten mit ähnlichen Einzelfehlern reduziert die Parametrisierung $S - S_0 = K \cdot (R - R_0)$ die Anpassung auf eine Ursprungsgerade (S_0 und R_0 sind die mittleren Orte und Widerstände). Die Steigung der Ausgleichsgeraden liefert den Kalibrationsfaktor K zur Umrechnung von Widerstandseinheiten auf Längen- bzw Winkeleinheiten. Wie bei allen

```
CASSY          / Kanal B / Strombox
                 Widerstand Rb1, 0-10kOhm,
                 gemittelt 1000 ms
Meßparameter   / manuell
Formel         / neue Größe S = 5*n+3
                 (Messungen bei 8,13,...)
Darstellung    / X-Achse  Rb1
                 Y-Achse  S
```

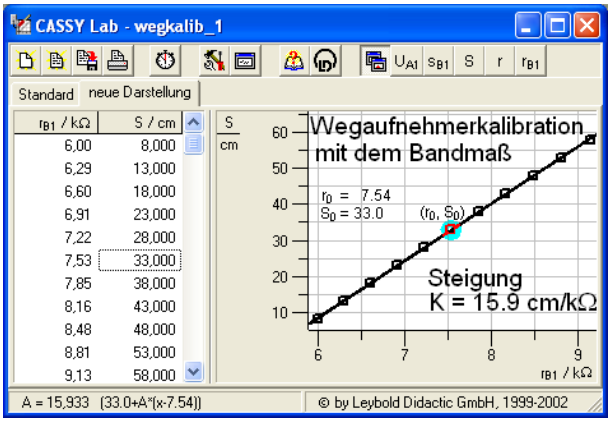


Abbildung 1.2: CASSY-LAB Kalibration des Wegaufnehmers.

Ausgleichsrechnungen sind die Einzelfehler auf der x- und y-Achse zu berücksichtigen. Liefert die Geradenanpassung ein χ^2 von etwa 1 pro Freiheitsgrad, so ist die Fehlerabschätzung – und damit auch der Fehler des Steigungsfaktors – sinnvoll. Diese Unsicherheit von K muß bei den folgenden Messungen als systematischer Fehler berücksichtigt werden, d.h. er liefert unabhängig von den jeweiligen Einzel-Meßwerten einen zusätzlichen Beitrag als Skalenfehler bei der Umrechnung des Endergebnisses von $k\Omega$ auf m bzw. Grad.

Fehlerabschätzung Die Messungen der Welleneigenschaften werden mit Sensor-CASSY aufgezeichnet. Dabei kommen verschiedene Meßaufnehmer zum Einsatz, die vor der Messung kalibriert werden (Weg/Winkelaufnehmer und Ultraschallwandler bzw. Mikrowellenantennen mit nachgeschalteten Verstärkern). Neben diesen systematischen Fehlerquellen beeinflussen Umweltbedingungen die Messungen (z.B. die Raumtemperatur während der Ultraschallmessungen).
Die Schätzung der statistischen Fehler geschieht durch Mehrfachmessungen (Mittelwert/RMS) oder durch Variation der Meßwertintervalls z.B. für Peakwertbestimmungen. Mittels Fehlerfortpflanzung wird schließlich die Güte der Messung (Vertrauensbereich) ermittelt. I. A. reduziert sich der Fehler durch eine sinnvolle Verteilung der Meßwerte (kleinere Abstände und damit mehr Meßwerte an kritischen Stellen wie z.B. Beugungsminima/maxima oder Knoten der stehenden Wellen).
Um die begrenzte Meßzeit effektiv auszunutzen, ist es sinnvoll, schon während der Messung die einzelnen Fehlerbeiträge getrennt zu bestimmen. Dominiert ein Beitrag den Meßfehler, sollte der weitere Aufwand in dessen Reduzierung investiert werden.
Hinweis: Die im CASSY-Handbuch angegebenen Fehler beziehen sich auf Toleranzen von Gerät zu Gerät. Die Wiederholgenauigkeit bei Benutzung eines Geräts – nach evtl. Kalibration – ist wesentlich höher und kann mit der Ablesegenauigkeit abgeschätzt werden.

1.3 Versuche mit Ultraschall

1.3.1 Versuchsaufbau

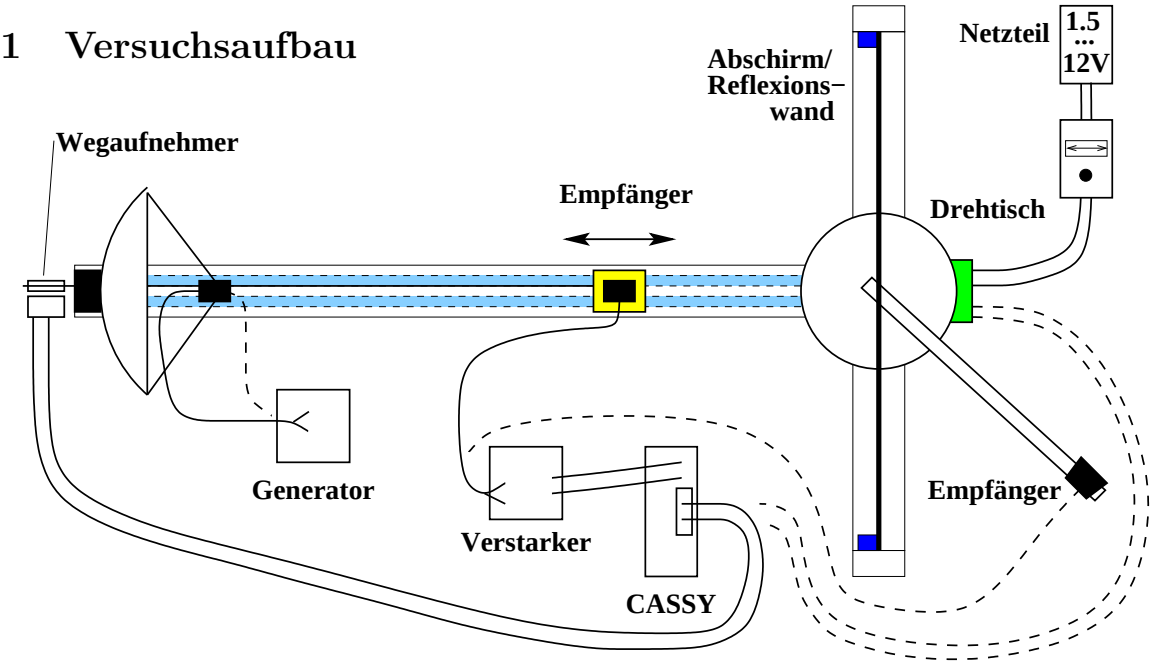


Abbildung 1.3: Prinzipieller Versuchsaufbau Ultraschall. Die durchgezogene Verkablung entspricht Teil **a)**, die gestrichelte nachfolgenden Versuchsteilen

Benötigte Geräte:

- Sensor-CASSY mit Stromquellenbox `LEYBOLD 542 031`
- 3 Piezoelemente `ELWE/NEVA` als Ultraschallwandler. Durch den Piezoelektrischen Effekt führen mechanische Deformation bei polaren Kristallen zu Dipolverschiebungen mit – an den Außenflächen abgreifbaren – meßbaren Potentialdifferenzen. Umgekehrt führt eine aussen angelegte Spannung zu Kristalldeformation. Damit sind sie als Sender und Empfänger einsetzbar – wegen der kleinen Auslenkungen z.B. als Fuß in Rastertunnelmikroskopen oder umgekehrt als Kristalltonabnehmer in Plattenspielern. Hier benutzt man sie wegen ihrer niedrigen Trägheit als Hochfrequenztonwandler mit einer Resonanzfrequenz von ca. 40 kHz, die allerdings leicht von der Kristallgeometrie abhängt.
- Generator `LEYBOLD 416 014` Mit Hilfe des Drehpotentiometers kann die Anregungsfrequenz zwischen 35-40kHz variiert werden. Ein Umschalter ermöglicht die Wahl zwischen kontinuierlichem und gepulstem Betrieb. Bei allen Versuchsteilen wird der kontinuierliche Modus beibehalten. Das Gerät besitzt einen Zeitschalter, der nach längerem Betrieb den Generator automatisch abstellt. Von Zeit zu Zeit sollte geprüft werden, ob das Gerät noch aktiv ist (rote Kontroll-LED).
- Verstärker (AC-Amplifier) `LEYBOLD 416 013` mit regelbarer Verstärkung. Dieser Verstärker kann das Signal sowohl als Wechselspannung (z.B. für Messungen mit einem Oszilloskop) als auch als Gleichspannung ausgeben. In diesem Versuch wird stets der Gleichspannungsausgang (Schalterstellung =) auf den Spannungseingang des Sensor-CASSYs gegeben. Der

Verstärker besitzt einen Zeitschalter, der nach längerem Betrieb das Gerät automatisch abstellt. Von Zeit zu Zeit sollte geprüft werden, ob das Gerät noch aktiv ist (rote Kontroll-LED).

- Parabolspiegel mit Halter
- Wegaufnehmer `LEYBOLD 529 031` mit Faden und Befestigungsmuffe
- Mechanischer Aufbau mit motorgetriebenem Drehtisch, Reflexionswand
- verschiedene Aufsätze für mechanischen Aufbau: Schiebetisch mit Sensorhalterung, Dipolhalter, verstellbarer Reflexionswandhalter
- diverse Netzgeräte und Kabel

Der Versuchsaufbau besteht aus einem (in Versuchsteil **e)** zwei) Ultraschallwandler(n) als Sender und einem Ultraschallwandler als Empfänger. Der Sender bleibt während einer Messung ortsfest, der Empfänger wird je nach Versuchsteil auf verschiedene Weise bewegt oder auch ortsfest gehalten. Außer in den Versuchsteilen **a)** (Abstandsmessung) und **e)** (aktiver Dipol) wird ein Parabolspiegel zur Erzeugung von homogenen, ebenen Wellen benutzt. Zur Fixierung des Senders bzw. Führung des Empfängers wird ein T-förmiges Schienenkreuz mit aufgesetztem motorgetriebenem Drehtisch verwendet. Abb. 1.3 zeigt den prinzipiellen Versuchsaufbau. Man baue die Grundschaltung (Versorgung Sender, Verstärker Empfänger, Strombox für Bewegungsmessung) einschließlich Sensor-CASSY auf. Jeder Versuchsteil ist durch seine eigene Variante des Versuchaufbaus charakterisiert, welche im nächsten Kapitel beschrieben werden. Es ist darauf zu achten, daß die Intensität der Welle am Messort stark vom Aufbau abhängt (offensichtlich ist die maximale Intensität hinter einem Doppelspalt größer als hinter einem Einfachspalt der gleichen Breite). Somit muß bei jeder Messung der Messbereich und die Verstärkung angepasst werden, um eine optimale Ausnutzung des CASSY-Messbereichs ('Binningeffekte' der Digitalisierung) zu erzielen. Die Frequenz sollte einmal eingestellt und danach nicht mehr verändert werden, da sich sonst die Wellenlänge ändert. Der Drehtischmotor ist für Spannungen bis 6V ausgelegt. Ein Vorwiderstand ermöglicht das Betreiben mit dem stufenweise regelbaren 12V-Netzgerät. Die Drehgeschwindigkeit kann durch Umschalten der Ausgangsspannung am Netzgerät verändert werden. Die Messungen sollten bei möglichst kleiner Drehgeschwindigkeit erfolgen, damit die Mittelungszeit des Sensor-CASSY die Messung minimal beeinträchtigt. (Warum?) Mit dem Umschalter kann die Drehrichtung gewählt werden. Läuft der Drehteller nicht von alleine an, so kann mit dem Taster der Vorwiderstand kurzzeitig überbrückt werden.

1.3.2 Versuchsdurchführung

a) Abstandsmessung

Der Piezowandler liefert ein zum Schalldruck p proportionales Signal, das im Verstärker durch Quadrieren gleichgerichtet wird. Das Gleichspannungsausgangssignal U sollte somit proportional zur Schallintensität sein: $U \sim p^a$ mit $a = 2$. Um diesen Exponenten a zu bestimmen, wird das Empfängersignal U in Abhängigkeit des Abstands r zum Sender gemessen. Bei einer Kugelwelle gilt gemäß Gl. 1.6 für den Schalldruck: $p(r) \sim 1/r$ und damit $U \sim r^{-a}$. Mit dem Kalibrationsexponenten a kann dann von Signalspannung U auf Intensität umgerechnet werden: $I \sim U^{2/a}$

Für diese Messung wird der Sender direkt auf den Empfänger gerichtet und letzterer auf dem Schlitten auf der Schiene montiert. Der Parabolspiegel und die Abschirm/Reflexionswand werden hier nicht benutzt, damit nicht ungewollt stehende Wellen, etc. erzeugt werden. Der Wegaufnehmer ist ein Mehrgang-Drehpotentiometer und wird an die Strombox angeschlossen. Nach der Kalibration des Wegaufnehmers (vgl. Abb. 1.2) kann die Abstandsabhängigkeit des Schalldrucks aufgezeichnet werden. Abb. 1.4 zeigt eine solche Messung:

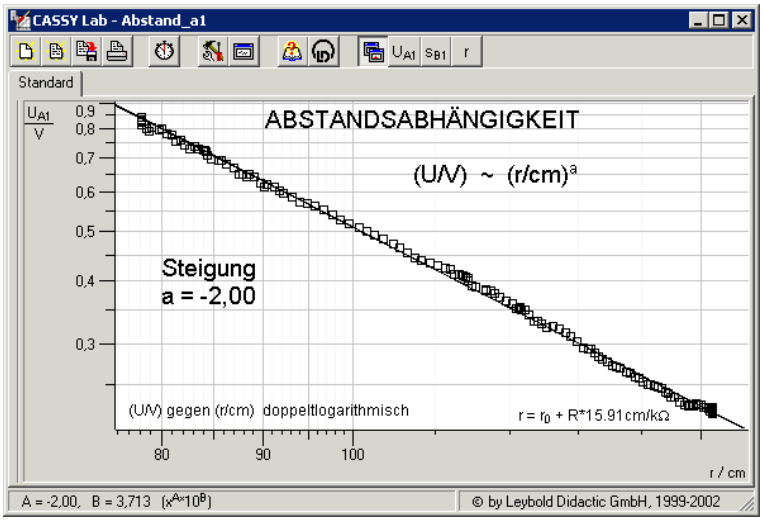


Abbildung 1.4: Signalspannung gegen Abstand r

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

- CASSY-Lab Tip zur Aufzeichnung der Meßwerte:

```
CASSY        / Kanal A /    Spannung Ua1     +- Umax V,  gemittelt 200ms
               Kanal B /    Widerstand rB1,   0-10kOhm,  gemittelt 200ms
Meßparameter / automatisch  Intervall 200 ms
Formel       / neue Größe   S = 100.0+15.9*(rB1-5.0)     # S0, K, r0
Darstellung  / X-Achse  S
               Y-Achse  Ua1
```

- Die Frequenz des Generators ist mit einem Drehpotentiometer in einem kleinen Bereich zwischen 35-40kHz veränderbar. Die Eigenfrequenz der Ultraschallwandler kann von Gerät zu Gerät leicht variieren. Daher sollte die Generatorfrequenz so getrimmt werden, daß ein möglichst großes Signal gemessen werden kann. Danach stets diese Einstellung beibehalten.

- Auf parallaxenfreie Streckenmessung achten (Faden horizontal, entlang der Führungsschiene). Vor der ersten Messung den Absolutwert (Offset S_0) der umgerechneten Strecke S überprüfen.

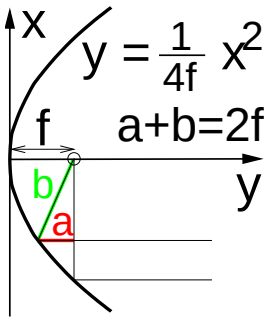
- Um den Exponenten der Abstandsabhängigkeit zu bestimmen, werden die Messungen in doppelt-logarithmischer Darstellung aufgetragen (siehe Abb. 1.4 als Beispiel). Warum wählt

man diese Darstellung? Aus dem Ergebnis wird der Kalibrationsexponent a zwischen Intensität und angezeigter Spannung bestimmt.

- Bei geringem Abstand zwischen Sender und Empfänger ist die Welle noch nicht ideal kugelförmig. Außerdem geht der Fehler des Abstandsoffsets S_0 zwischen Sender und Empfänger (die beide in einem Gehäuse eingeschlossen sind) stärker ein als bei größerer Entfernung. In großer Entfernung wird das Signal ggü. dem Rauschen kleiner. Man suche also einen Bereich, in dem die Messungen in der doppelt-logarithmischen Darstellung gut durch eine Gerade beschrieben werden.

- Fehlerabschätzung: Abstandsmessung mit Absolutfehler in S_0 und Kalibrationsfaktor von K. Regression mit statistischem Fehler (Fehlerfortplanzung für doppelt-log. Auftragung).

Alle folgenden Versuche mit einem Einzelsender benutzen ebene Schallwellen, die mit Hilfe eines Parabolspiegels erzeugt werden. Wie nebenstehend skizziert gibt es bei parabolischer Spiegelform einen Punkt, von dem aus alle Strahlen unabhängig vom Abstand x zur Achse die gleiche Weglänge – und damit auch die gleiche Phasenlage – haben. Man montiere den Ultraschallwandler im Fokus des Spiegels, und verifiziere die Ebenheit der Wellen, indem man überprüft, ob die Signalstärke des Empfängers bei verändertem Abstand konstant bleibt.



b) Stehende Welle

Die Wellenlänge wird durch Ausmessen der Schalldruckknoten bzw. -Bäuche einer stehenden Welle bestimmt. Die Abschirm/Reflexionswand wird an der Halterung befestigt und die Öffnung verschlossen. Gemessen wird wieder das Empfängersignal in Abhängigkeit des Ortes. Abb. 1.5 zeigt exemplarisch eine Messung inklusive der abgeschätzten Wellenlänge.

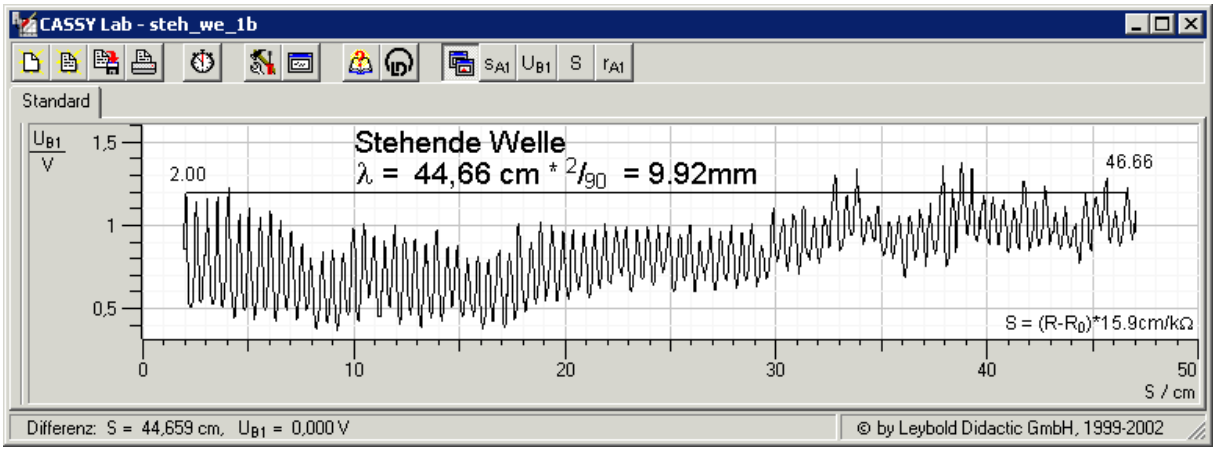


Abbildung 1.5: Stehende Schallwelle

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

- Vor dem Versuch schätze man die Wellenlänge mit Hilfe der Schallgeschwindigkeit in Luft ab.
- Langsam verschieben, damit die Mittelungszeit des Sensor-CASSY sich nicht schädlich auswirkt.
- Wie groß ist der Fehler? (Peakbestimmung, Streckenkalibration)
- Richtig abzählen – zwischen n Knoten liegen (n-1) halbe Wellenlängen

c) Beugung

Für die Untersuchung von Beugungsphänomenen stehen verschiedene Platten aus Aluminium zur Verfügung, mit denen Einzelspalte beliebiger Breite sowie Doppel- bis Vierfachspalte mit 25mm breiten Stegen in die Wand eingebaut werden können. Der Empfänger wird am Ende der am Drehteller befestigten Schiene installiert. Die Drehachse soll in der Mitte des Spalts liegen. An die Strombox wird das Potentiometer des Drehtellers angeschlossen. Aufgezeichnet wird das Empfängersignal gegen den Widerstand. Gemessen wird die Beugung an Einzelspalten verschiedener Breite, sowie an Doppel- und Mehrfachspalten. Als Beispiel sind Messwerte eines Doppelspalts in Abb. 1.6 gezeigt.

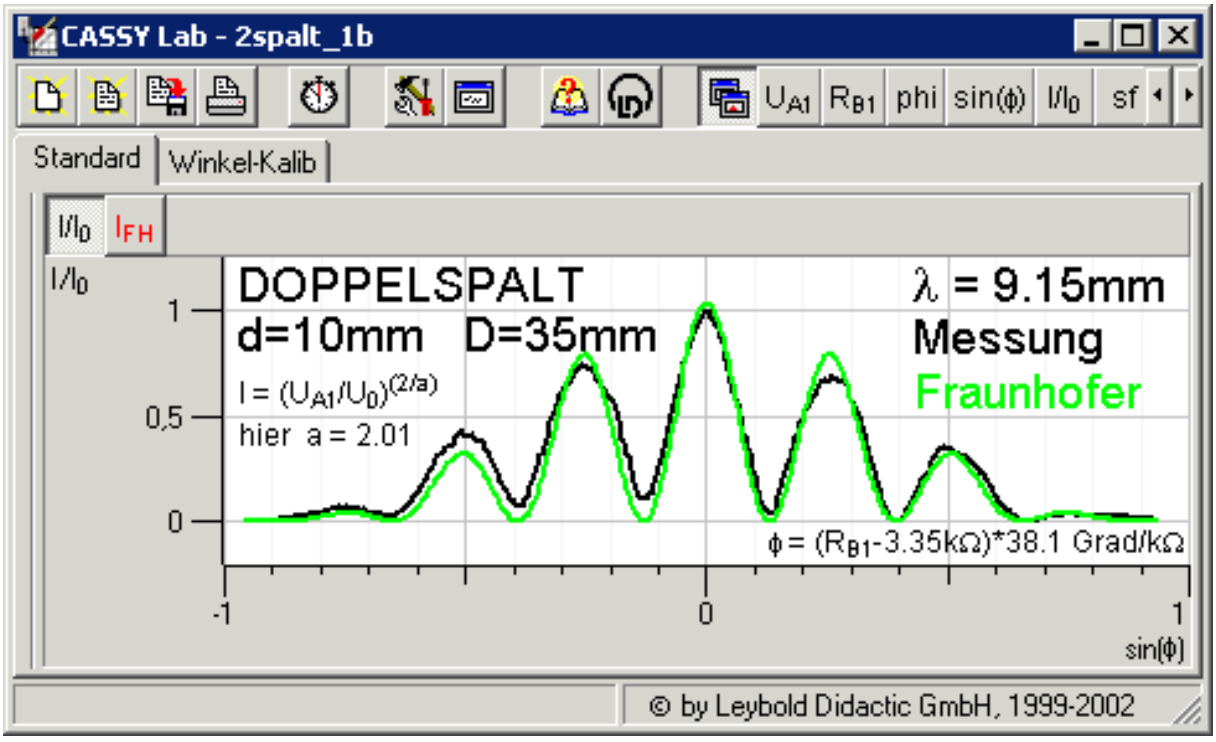


Abbildung 1.6: Intensitätsverteilung hinter einem Doppelspalt

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

- Die Winkelmessung mit dem Drehteller geschieht wie beim Wegaufnehmer über ein Drehpotentiometer. Dieses muß ebenfalls kalibriert werden. Man kann den Teller per Hand auf verschiedene Winkel einstellen und den entsprechenden Wert des Widerstandes im CASSY-Fenster ablesen. Der gesamte Meßbereich sollte kalibriert werden und mittels linearer Regression (mit Fehlerbetrachtung) ausgewertet werden. Bei allen folgenden Messungen muß darauf geachtet werden, daß der Drehteller 'schlupffrei' (insbesondere am Maximalausschlag) fährt.

- Anhand der in Teil **b)** bestimmten Wellenlänge wählt man sinnvolle Breiten der Spalte (nur Hauptmaximum, ein oder zwei Nebenmaxima).

- Die Auswertung erfolgt durch Vergleich mit der Erwartung nach Gleichung 1.10. Dazu muß das Empfängersignal in Schallintensität umgerechnet werden (Teil **a)**). Eventuell muß die Nullage korrigiert werden, falls die Schallwelle nicht exakt senkrecht auf die Wand fällt. Dazu werden die links und rechts gemessennen Extrema in $\sin\alpha$ gemittelt. Man berechne die Position der Extrema nach Gl. 1.12 mit der in Teil **b)** ermittelten Wellenlänge und vergleiche mit der Messung.

- Die Beugungsbilder weisen häufig unvorhergesehene Unregelmäßigkeiten auf, die durch Reflexionen an sonstigen umstehenden Wänden, Aufbauten, etc. erzeugt werden. Solche Einflüsse möglichst minimieren. Um zu zeigen, daß es sich um echte physikalische Phänomene handelt (und keine Fehlmessung des Gerätes ist), die Messung wiederholen (z.B. durch Messung auf Hin- und Rückweg). Eine 'Nullmessung' mit geschlossenem Spalt zeigt eventuelle Störungen durch Beugung an sonstigen festen (und beweglichen ...) Gegenständen (und Individuen ...) im Raum an und muß gegebenenfalls von der Messung abgezogen werden.
  Bei großen Beugungsstrukturen ist die Fraunhofer-Näherung nach Abb. 1.1 evtl. nicht mehr zulässig.

d) Aktiver Dipol

Analog zum Doppelspalt kann auch ein Interferenzmuster erzeugt werden, indem man zwei mit dem gleichen Oszillator (phasenstarr) angeregte Sender nebeneinander aufstellt. Ein gleichphasiges Schwingen der beiden Sender entspricht im Prinzip einem Doppelspalt mit der Senderabstrahlcharakteristik anstelle der Einzelspaltfunktion als Einhüllende. Man kann sie jedoch auch gegenphasig anregen, was zu einem veränderten Interferenzbild führt. Die beiden Sender werden so über dem Drehtisch installiert, daß ihre Position dem eines vorher vermessenen Doppelspaltes entsprechen. Sie werden an denselben Generator angeschlossen; gegenphasiges Schwingen erreicht man durch Umpolung des Steckerpaares eines Senders. Dabei müssen die Piezowandler voneinander elektrisch isoliert eingebaut werden, da ansonsten der Oszillatorausgang über die Piezowandlergehäuse kurzgeschlossen wird. Abb. 1.7 zeigt das aufgezeichnete Empfängersignal gegen den Drehtellerwinkel für gleich- und gegenphasigen Betrieb der zwei Sender.

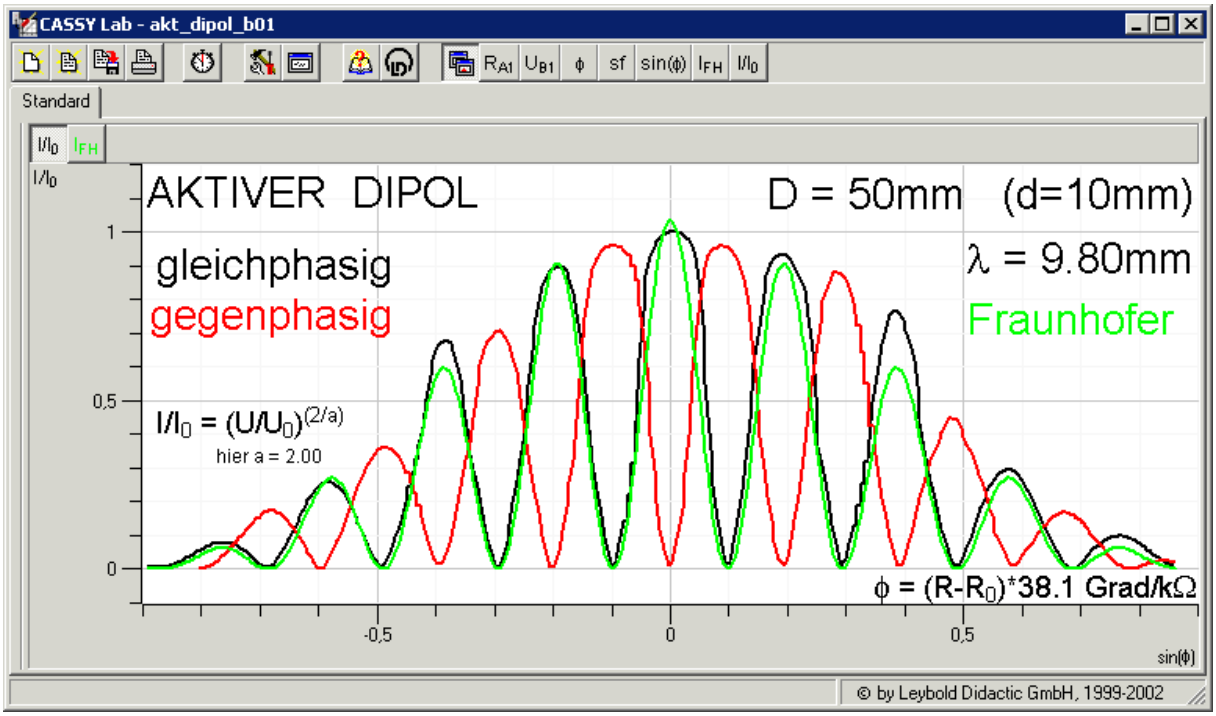


Abbildung 1.7: Intensitätsverteilung eines aktiven Dipols

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

- Man vergleiche das Interferenzmuster der gleichphasigen mit der gegenphasigen Schwingung.
- Man vergleiche das Interferenzmuster mit dem Doppelspalt aus Teil **c)**

e) Reflexion / reflexionsfreie Wand

Analog zur optischen Linsenvergütung kann auch für Schallwellen eine reflexfreie Wand konstruiert werden. Die nebenstehende Abbildung verdeutlicht das Prinzip. Der Raum zwischen den Wänden kann als Resonator mit zwei festen Wänden aufgefaßt werden. Für bestimmte D ist er in Resonanz und absorbiert die einfallende Welle maximal, d.h. die reflektierte Welle verschwindet. Die Abstände Δ zwischen solchen Positionen werden erwartet für $\Delta = \lambda/2 \cos\phi$.

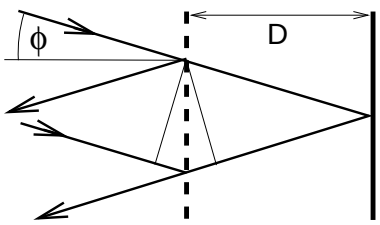


Abbildung 1.8: Reflexfreie Wand

Für diesen Versuch steht ein Verschiebetisch zur Verfügung, der anstelle der Holzwand auf einer Traverse über dem Drehteller unter 30 Grad zur Einfallsrichtung montiert werden kann.

Eine verschiebbare Lochplatte dient als teildurchlässige vordere und eine fest installierte als undurchlässige hintere Reflexionswand. Der Empfänger-Arm wird auf der Sender-Seite auf einen Winkel von etwa 60 Grad eingestellt, um das reflektierte Signal zu messen. Der Wegaufnehmer wird auf der Grundplatte montiert, um den Abstand D zwischen den zwei Wänden zu messen. Abb. 1.9 zeigt eine aufgezeichnete Messung des Empfängersignals in Abhängigkeit des Abstandes D, sowie die Bestimmung von Δ.

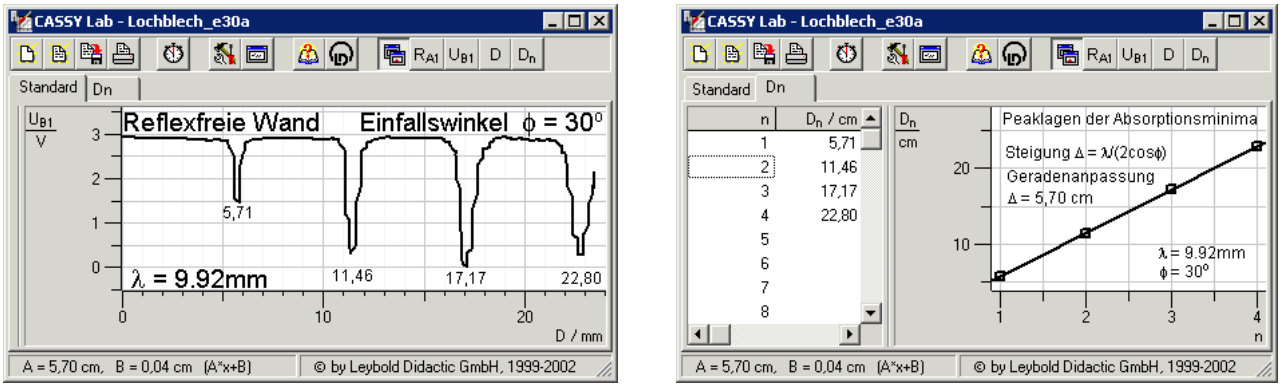


Abbildung 1.9: Reflexion an einer doppelten Wand

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

- Da hier nur kleine Wegstrecken gemessen werden, sollte der Widerstandsmeßbereich angepaßt werden (0 - 300Ω)
- Auf parallaxenfreie Streckenmessung achten. Dann kann der Streckenkalibrationsfaktor K aus Teil **a)** übernommen werden. Eine Kalibration des Meßintervalls mit der Mikrometerschraube ist aber besser.
- Warum bildet sich das gemessene Muster? Wo sollte sich das erste Minimum befinden, wo die weiteren? Man vergleiche die Messung mit der Erwartung für die aus Teil **b)** erhaltenen Wellenlänge. (mittels linearer Regression, wie in Abb. 1.9 rechts gezeigt)

1.4 Versuche mit elektromagnetischen Mikrowellen

1.4.1 Versuchsaufbau

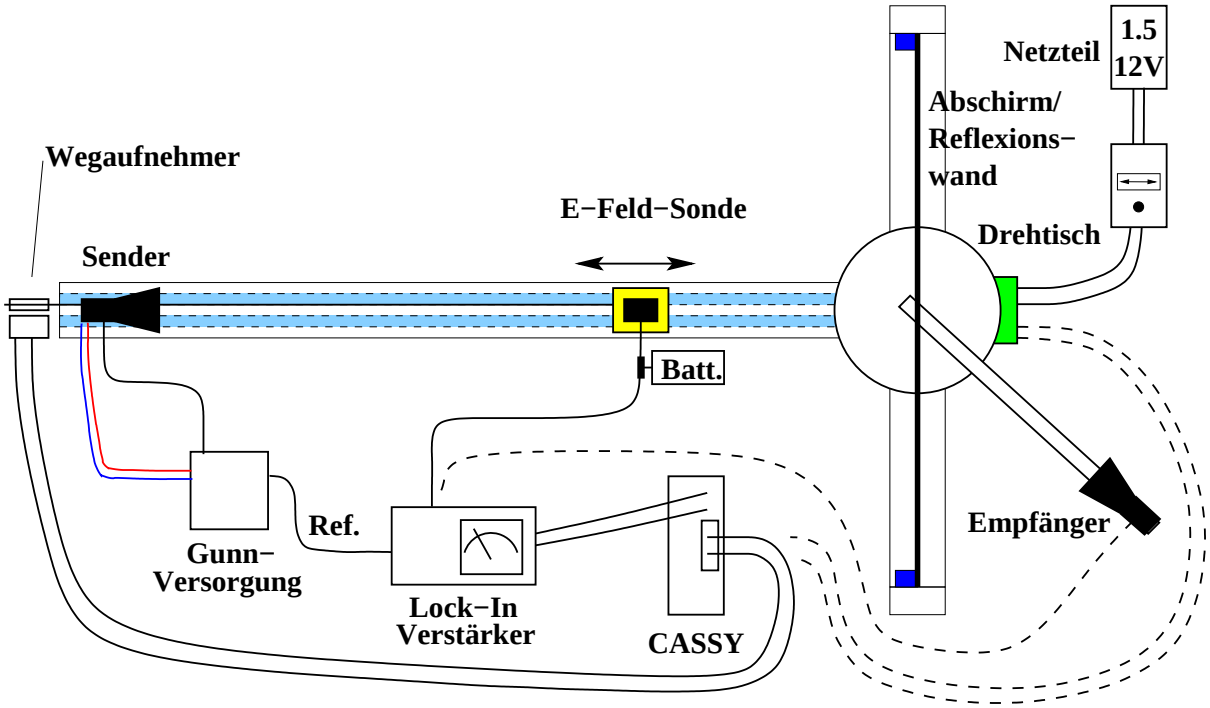
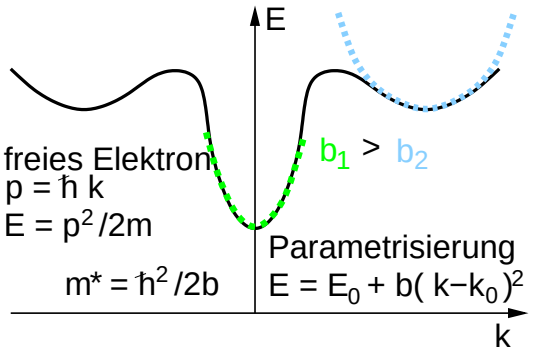


Abbildung 1.10: Versuchsaufbau Mikrowelle

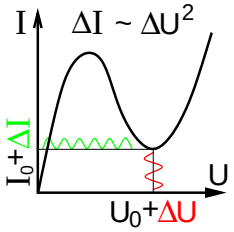
Benötigte Geräte:

- Mechanischer Aufbau mit motorgetriebenem Drehtisch und Reflexionswand
- Gunn-Versorgung mit Modulator
- Lock-In Meßverstärker
- Gunn-Oszillator mit Hornstrahler
- Empfänger mit Hornantenne
- Sensor-CASSY mit Stromquellenbox `LEYBOLD 542 031`
- Wegaufnehmer `LEYBOLD 529 031` mit Faden und Befestigungsmuffe
- diverse Netzgeräte und Kabel
- verschiedene Aufsätze für mechanischen Aufbau: Polarisationsfilter, PE-Halbzylinder
- Verschiedene Abstandsbleche für PE-Halbzylinder

Der Versuchsaufbau besteht aus einem Gunn-Oszillator als Sender und einer Hornantenne als Empfänger. Zur Erzeugung der Mikrowellen wird eine Gunn-Diode eingesetzt. Der Gunn-Effekt ist eine hochfrequente Strommodulation, die durch unterschiedliche effektive Massen m^* der Elektronen im nebenstehend skizzierten Feld des Kristallgitters zustandekommt. Abhängig von der Schichtdicke des Halbleiters ergeben sich Frequenzen im GHz Bereich.



In der Empfänger-Antenne wird eine Tunnel-Diode im nebenstehen skizzierten nicht-linearen (quadratischen) Bereich ihrer Kennlinie betrieben, um das empfangene Hochfrequenz-Signal in einen Effektivwert zu wandeln, der proportional zur Intensität ist.



Um den störungsfreien Betrieb mehrerer Anlagen im gleichen Raum zu ermöglichen, wird der Strom durch die Gunn-Diode mit einer anlagenspezifischen Frequenz f_i im kHz Bereich moduliert. Der Meßverstärker multipliziert nach dem Lock-In Prinzip das Antennensignal mit dem jew. Modulationssignal als Referenz. Signale anderer Anlagen mit Modulationsfrequenz f_j verschwinden bei Mittelung über Zeiten $t \gg 1/|f_i - f_j|$.

Sender oder Empfänger können je nach Messung auf der Schiene oder an einem Dreh-Arm bewegt werden. Zur Führung wird ein T-förmiges Schienenkreuz mit aufgesetztem motorgetriebenem Drehtisch verwendet. Abb. 1.10 zeigt den prinzipiellen Versuchsaufbau. Man baue die Grundschaltung (Gunn-Versorgung, Sender, Empfänger, Lock-In-Verstärker, Strombox für Bewegungsmessung) einschließlich Sensor-CASSY auf. Jeder Versuchsteil ist durch seine eigene Variante des Versuchaufbaus charakterisiert, welche im nächsten Kapitel beschrieben werden. Es ist darauf zu achten, daß die Intensität der Welle am Messort stark vom Aufbau abhängt. Z.B. ist die maximale Intensität hinter einem Doppelspalt größer als hinter einem Einfachspalt der gleichen Breite. Wegen stehender Wellen im Raum kann das gemessene Signal auch von der Position oder der Orientierung des Aufbaus im Raum abhängen. Somit muß bei jeder Messung der Messbereich und die Verstärkung angepasst werden, um eine optimale Ausnutzung des CASSY-Messbereichs ('Binningeffekte' der Digitalisierung) zu erzielen.

Der Drehtischmotor ist für Spannungen bis 6V ausgelegt. Ein Vorwiderstand ermöglicht das Betreiben mit dem stufenweise regelbaren 12V-Netzgerät. Die Drehgeschwindigkeit kann durch Umschalten der Ausgangsspannung am Netzgerät verändert werden. Die Messungen sollten bei möglichst kleiner Drehgeschwindigkeit erfolgen, damit die Mittelungszeit des Sensor-CASSY die Messung minimal beeinträchtigt. (Warum?) Mit dem Umschalter kann die Drehrichtung gewählt werden. Läuft der Drehteller nicht von alleine an, so kann mit dem Taster der Vorwiderstand kurzzeitig überbrückt werden.

1.4.2 Versuchsdurchführung

a) Abstandsmessung

Das von der Empfänger-Diode demodulierte Signal wird in eine Spannung $U \sim E^a$ verstärkt. Erwartet wird $a = 2$ und damit eine Proportionalität zwischen Spannung und Intensität. Eine Abweichung kann sich aber ergeben wegen eines nicht optimal eingestellten Arbeitspunktes der Tunnel-Diode oder eines nicht-linearen Lock-In Verstärkers. Mit der Messung der Signalspannung U in Abhängigkeit des Abstands r zwischen Sender und Empfänger kann der Exponent a bestimmt werden. Für die Auswertung der folgenden Versuchsteile berechnet sich die Intensität dann zu $I \sim U^{2/a}$. Ausgenutzt wird die bekannte Abnahme der Feldstärke einer Kugelwelle. Nach Gl. 1.6 gilt $E(r) \sim 1/r$ und damit $U \sim r^{-a}$.
Um bei großen Entfernungen messen zu können, wird der Empfänger am Ende des Dreh-Arms in Verlängerung der Längs-Schiene montiert. Der Sender wird auf dem Schlitten am Schienenanfang montiert und – ohne Abschirm/Reflexionswand dazwischen – auf den Empfänger gerichtet. Der Wegaufnehmer zur Bestimmung der Senderposition ist ein Mehrgang-Drehpotentiometer und wird an die Strombox angeschlossen.
Nach der Kalibration des Wegaufnehmers (vgl. Abb. 1.2) kann die Abstandsabhängigkeit des des E-Feldes aufgezeichnet werden. Abb. 1.11 zeigt eine solche Messung:

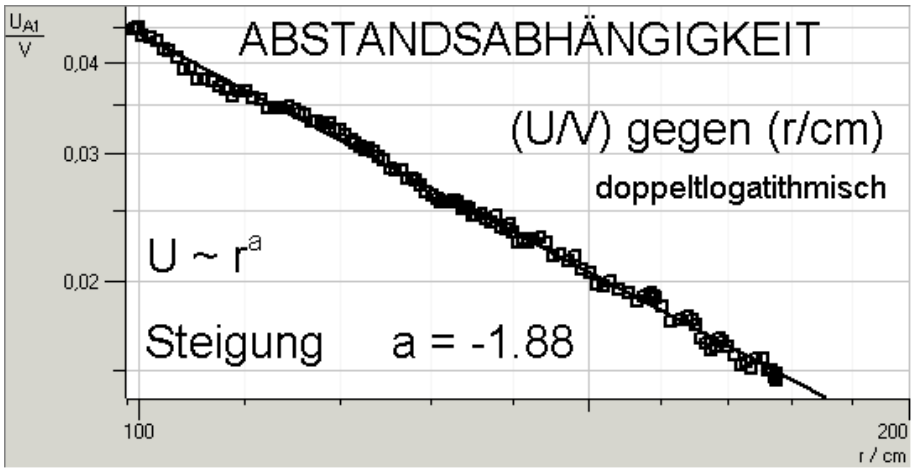


Abbildung 1.11: Signalspannung gegen Abstand r

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

- CASSY-Lab Tip zur Aufzeichnung der Meßwerte:

```
CASSY        / Kanal A /    Spannung Ua1   +- Umax V   gemittelt 200ms
               Kanal B /    Widerstand rB1,  0-10kOhm, gemittelt 200ms
Meßparameter / automatisch  Intervall 200 ms
Formel       / neue Größe   S = 50.0 + 15.9*(rB1-5.0)   # S0, K, R0
Darstellung  / X-Achse  S
               Y-Achse  Ua1
```

- Auf parallaxenfreie Streckenmessung achten (Faden horizontal, entlang der Führungsschiene).
- Um den Exponenten der Abstandsabhängigkeit zu bestimmen, werden die Messungen in doppelt-logarithmischer Darstellung aufgetragen Warum wählt man diese Darstellung? Aus dem Ergebnis wird der Exponent a zwischen Feldstärke und angezeigter Spannung bestimmt.
- Bei geringem Abstand zwischen Sender und Empfänger ist die Welle noch nicht kugelförmig und der Absolutfehler des Abstandes hat einen größeren Einfluß. Bei großen Abständen hingegen wird das Signal klein gegenüber dem Rauschen. Man suche daher einen Bereich, in dem die Messungen in der doppelt-logarithmischen Darstellung gut durch eine Gerade beschrieben werden.
- Wie groß ist der Fehler der Abstandsmessung? Wie groß ist der Fehler des Kalibrationsfaktors?

b) Stehende Welle

Die Wellenlänge wird durch Ausmessen der Intensitätsknoten des elektrischen Feldes einer stehenden Welle bestimmt. Die Abschirm/Reflexionswand wird mit der Aluminiumseite zum Sender hin an der Halterung befestigt und die Öffnung mit einer Aluminiumplatte (warum metallisch?) verschlossen.

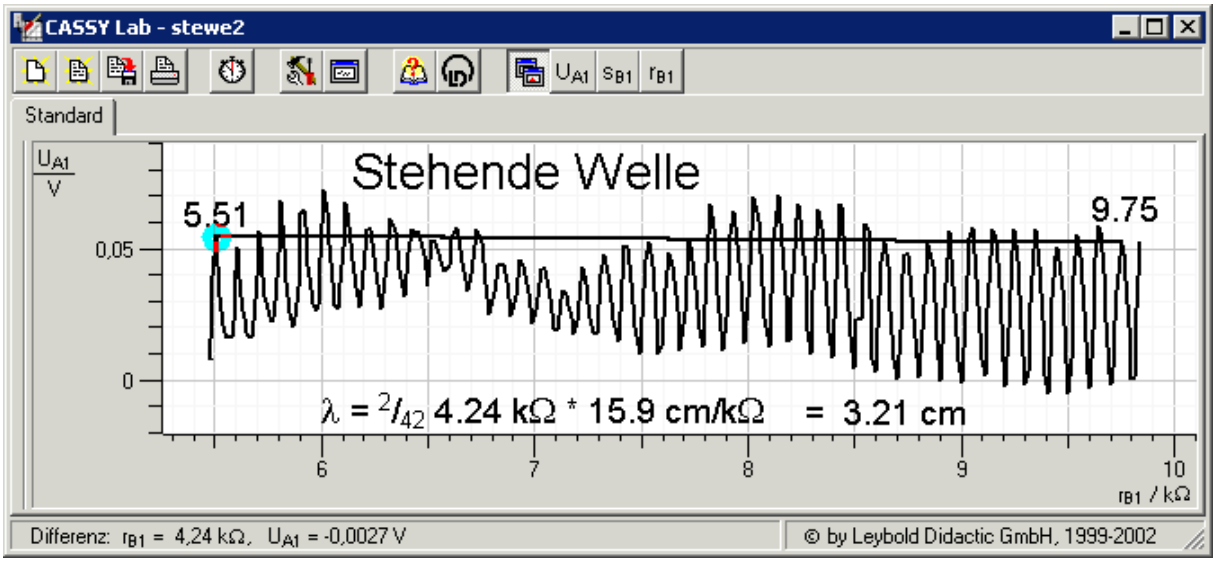


Abbildung 1.12: Mikrowellen: Stehende Welle vor einer leitenden Wand

Gemessen wird das Empfängersignal in Abhängigkeit des Abstands Empfänger-Wand. Abb. 1.12 zeigt exemplarisch eine Messung inklusive der durch abzählen der Knoten abgeschätzten Wellenlänge. Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

- Vor dem Versuch schätze man die Wellenlänge mit Hilfe der Lichtgeschwindigkeit in Luft ab.
- Langsam verschieben, damit die Mittelungszeit des Sensor-CASSY sich nicht schädlich auswirkt.
- Wie groß ist der Fehler? (Peakbestimmung / Strecken-Kalibration)

c) Beugung

Für die Untersuchung von Beugungsphänomenen stehen verschiedene Platten aus Aluminium zur Verfügung, mit denen Einzelspalte beliebiger Breite sowie Doppel- und Mehrfachspalte mit 25mm breiten Stegen in die Wand eingebaut werden können. Der Empfänger wird am Ende der am Drehteller befestigten Schiene installiert. Die Drehachse soll in der Mitte des Spalts liegen. An die Strombox wird das Potentiometer des Drehtellers angeschlossen. Aufgezeichnet wird das Empfängersignal gegen den Widerstand. Gemessen wird die Beugung an Einzelspalten verschiedener Breite, sowie am Doppel- und Mehrfachspalt. Als Bespiel sind Meßwerte eines Dreifachspalts in Abb. 1.13 gezeigt:

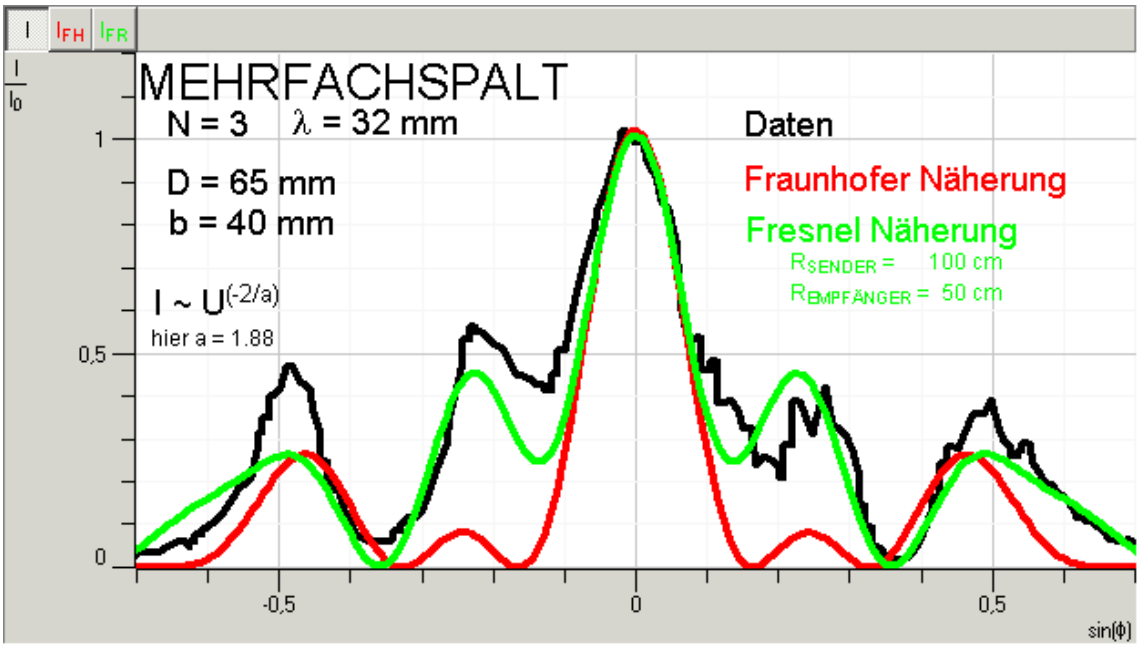


Abbildung 1.13: Messung eines Dreifachspalts. Deutlich zu erkennen ist, daß die Fraunhofer-Näherung (rot) die Messung schlechter beschreibt, als die Fresnel Rechnung (grün)

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

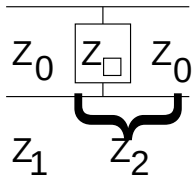
- Die Winkelmessung mit dem Drehteller geschieht wie beim Wegaufnehmer über ein Drehpotentiometer. Dieses muß analog zum Wegaufnehmer kalibriert werden. Man kann den Teller per Hand auf verschiedene Winkel einstellen und den entsprechenden Wert des Widerstandes im CASSY-Fenster ablesen. Der gesamte Meßbereich sollte kalibriert werden.

Die Eichung geschieht mittels linearer Regression (Fehler?). Bei allen folgenden Messungen muss darauf geachtet werden, daß der Drehteller 'schlupffrei' (insbesondere am Maximalausschlag) fährt.

- Anhand der in Teil **b)** bestimmten Wellenlänge wählt man sinnvolle Spaltbreiten, um das Hauptmaximum und evtl. ein oder zwei Nebenmaxima aufzeichnen zu können.

- Die Auswertung erfolgt durch Vergleich mit der Erwartung nach Gleichung 1.10. Dazu muß das Empfängersignal in die Intensität der Welle umgerechnet werden (Teil **a)**). Eventuell muss die Nullage korrigiert werden, falls die Mikrowelle nicht exakt senkrecht auf die Wand fällt. Dazu werden die links und rechts gemessennen Extrema in $\sin\alpha$ gemittelt. Man berechne die Position der Extrema anhand der in Teil **b)** ermittelten Wellenlänge und vergleiche mit der Messung.

- Die Beugungsbilder weisen häufig unvorhergesehene Unregelmäßigkeiten auf, die durch Reflexionen an sonstigen umstehenden Wänden, Aufbauten, etc. erzeugt werden. Solche Einflüsse möglichst minimieren (evtl. den Aufbau ein weinig verschieben). Um sich zu vergewissern, daß es sich um aufgezeichnete Mikrowellensignale handelt (und keine Artefakte des Meßgerätes), empfiehlt es sich, die Messung auf dem Hin- und Rückweg zu vergleichen. Eine 'Nullmessung' mit geschlossenem Spalt zeigt eventuelle Störungen durch Beugung an sonstigen festen und beweglichen ...) Gegenständen (und Individuen ...) im Raum an und muß gegebenenfalls von der Messung abgezogen werden.
  Zur Vermeidung von stehenden Wellen ist die Abschirmwand auf der Empfängerseite mit teildurchlässiger graphitierter Pappe verkleidet. Diese wirkt mit der vollständig reflektierenden Aluminiumfolie als sogenannter $\lambda/4$ Absorber (vgl. Abb. 1.8 – reflexfreie Wand). Ein Reflexionskoeffizient R für vollständige Auslöschung von direkt reflektierter mit der im Zwischenraum mehrfach reflektierten Welle wird dadurch erreicht, daß der Flächenwiderstand der Graphitschicht $Z_\square$ (angegeben in $\Omega/\square$) durch Auftragen in geeigneter Dicke auf den Wellenwiderstand des Vakuums $Z_0 = E/H = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = \pi \cdot 120\Omega$ eingestellt wird. Dann ist $R = (Z_1 - Z_2)/(Z_1 + Z_2) = 1/3$ – wie nebenstehend skizziert, da vor der Graphitfläche $Z_1 = Z_0$ ist und die Reflexion an der Graphitfläche mitsamt dem dahinterliegendem Halbraum stattfindet – also an der 'Parallelschaltung' von $Z_\square$ und wiederum Z_0, d.h. $1/Z_2 = 1/Z_\square + 1/Z_0$.



d) Polarisation

Zur Demonstration von Polarisationseffekten wird ein Gitter aus elektrisch leitenden Stäben senkrecht zur Verbindungslinie zwischen Sender und Empfänger aufgestellt. Um sich von der Wirkungsweise eines solchen Polarisationsfilters zu überzeugen, wird die Abhängigkeit der Signalstärke vom Gitterwinkel sowohl in Vorwärtsrichtung, als auch seitlich (bei geschwenktem Empfänger-Arm) beobachtet und qualitativ beschrieben. Dabei wird der Aufbau (durch Verschieben von Sender/Gitter/Empfänger/Schiene) so eingestellt, daß in Vorwärtsrichtung bei Gitterstäben parallel zum Sende-Dipol kein Signal mehr gemessen wird. Dann wird die Intensität in Vorwärtsrichtung hinter dem Gitter in Abhängigkeit vom Drehwinkel des Gitters wie in Abb. 1.14 aufgezeichnet.

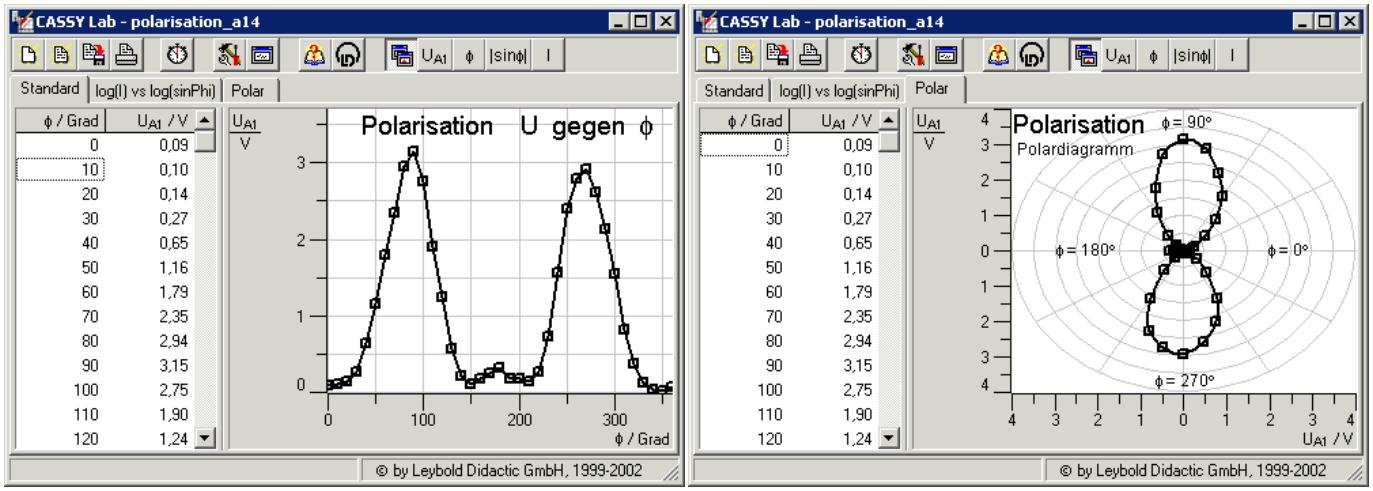


Abbildung 1.14: Gemessenes Signal gegen Drehwinkel des Polarisationsgitters.
Links in kartesischer Darstellung und rechts im Polardiagramm

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

- Der Winkel des Polarisationsfilters kann z.Zt. nicht direkt mit dem Sensor-CASSY ausgelesen werden. Somit muß ein wenig 'getrickst' werden, um die Werte zügig mit CASSY aufzuzeichnen. Für Messungen von 0 bis 360 Grad in 10 Grad Schritten hat sich folgende Einstellung bewährt:

```
CASSY        / Kanal A /    Spannung Ua1     +- Umax V,  gemittelt 1000ms
Meßparameter / manuell
Formel       / neue Größe   Phi: 10*(n-1)
Darstellung  / X-Achse  Phi
               Y-Achse  Ua1
```

- Bevor man die Darstellung in doppelt-logarithmischer Form ausführt, muss gezeigt werden, wo die Polarisationsebene liegt. Dies kann in kartesischer Auftragung durch Ermittelung der Maxima, oder im Polardiagramm über die (visuelle) Bestimmung einer Symmetrieachse geschehen.

- Das Gesetz von Malus (Gl. 1.14) wird in einer doppelt-logarithmischen Darstellung überprüft. Welcher Exponent wird erwartet? Da die Polarisation nicht vollständig ist und evtl. im Raum stehende Wellen am Ort des Empfängers ein Untergrund-Signal liefern, muß zunächst ein in der kartesischen Darstellung erkennbarer Signaloffset U_0 abgezogen werden. Außerdem muß das gemessene Signal mit dem Kalibrationsexponenten a aus der Abstandsmessung in die Intensität umgerechnet werden.

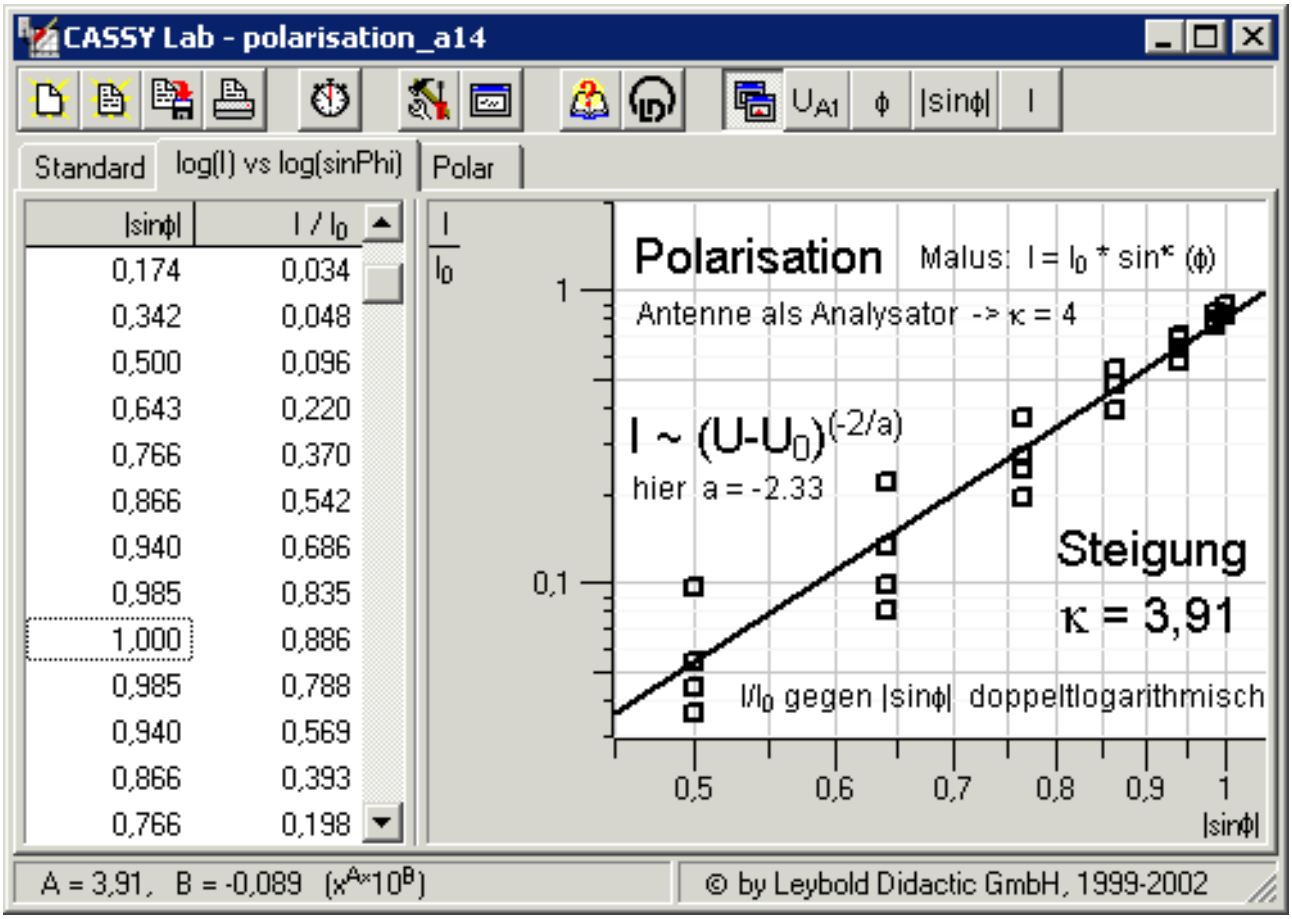
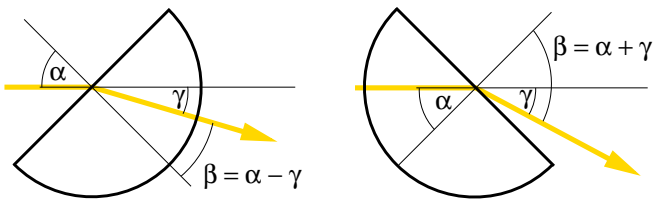


Abbildung 1.15: Polarisationsmessung in doppelt-logarithmischer Darstellung

e) Brechung in PE

Zur Überprüfung des Brechungsgesetzes wird ein PE-Halbzylinder anstelle der Holzwand auf ein waagerechtes U-Profil konzentrisch über den Drehteller gestellt. Der Empfänger wird so auf dem Schwenk-Arm befestigt, daß die Öffnung der Horn-Antenne auf einem Radius von 30cm liegt. Der Sender wird auf ca. 1m Abstand gestellt. Aufgezeichnet wird die Signalstärke in Abhängigkeit des Empfängerwinkels γ für verschiedene (jeweils positive und negative!) Einfallswinkel α.

Wie nebenstehend skizziert wird sowohl der Übergang von Luft nach PE, als auch von PE nach Luft gemessen, d.h. mit der flachen und auch der runden Seite des Halbzylinders zum Sender. Bis zu welchen Einfallswinkeln sind diese Messungen sinnvoll (Totalreflexion)?



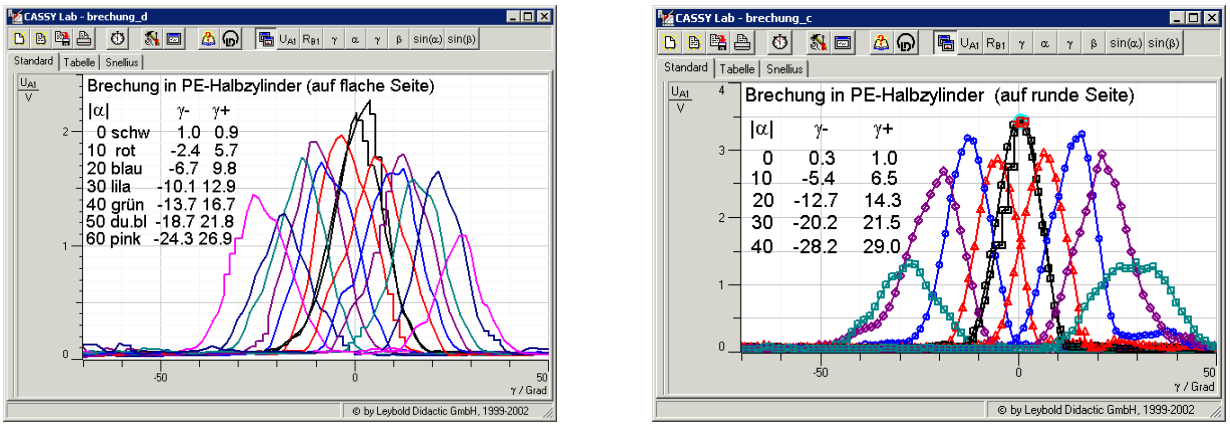

CASSY Lab - brechung_d
Brechung in PE-Halbzylinder (auf flache Seite)
|α| γ- γ+
0 schw 1.0 0.9
10 rot -2.4 5.7
20 blau -6.7 9.8
30 lila -10.1 12.9
40 grün -13.7 16.7
50 du.bl -18.7 21.8
60 pink -24.3 26.9
γ / Grad
© by Leybold Didactic GmbH, 1999-2002
CASSY Lab - brechung_c
Brechung in PE-Halbzylinder (auf runde Seite)
|α| γ- γ+
0 0.3 1.0
10 -5.4 6.5
20 -12.7 14.3
30 -20.2 21.5
40 -28.2 29.0
γ / Grad
© by Leybold Didactic GmbH, 1999-2002

Abbildung 1.16: Aufgezeichnete Signalstärken hinter dem PE-Halbzylinder. Links der Übergang Luft-PE. Rechts der Übergang PE-Luft

Zur Bestimmung des Brechungsindex wird aus den aufgezeichneten Signalverläufen der Ausfallswinkel β ermittelt und dann wie in Abb. 1.17 $\sin\alpha$ gegen $\sin\beta$ aufgetragen. Nach Gl. 1.13 liegen die Werte auf einer Ursprungsgeraden mit dem Brechungsindex als Steigungsfaktor:

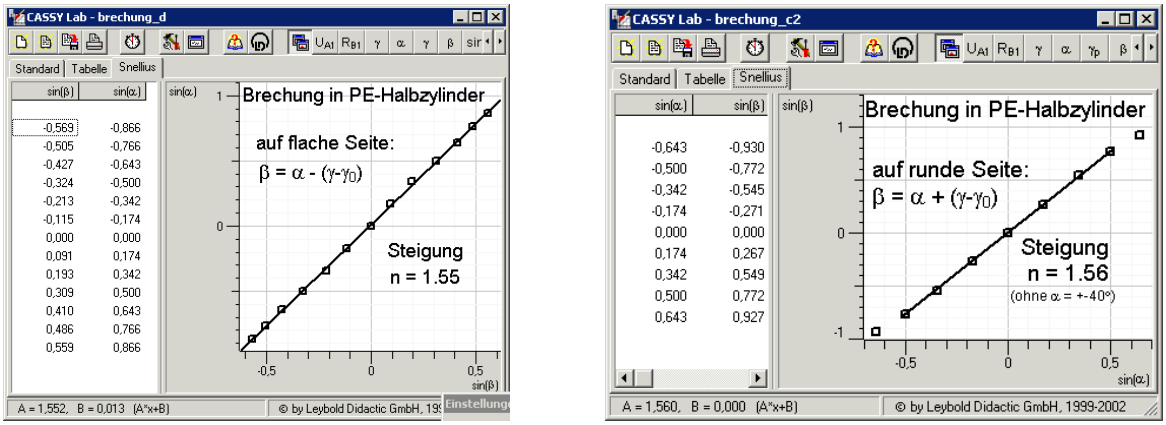
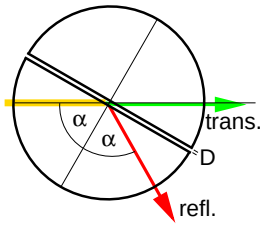

CASSY Lab - brechung_d
Brechung in PE-Halbzylinder
auf flache Seite:
β = α - (γ-γ0)
Steigung
n = 1.55
A = 1,552, B = 0,013 (A*x+B)
© by Leybold Didactic GmbH, 19
CASSY Lab - brechung_c2
Brechung in PE-Halbzylinder
auf runde Seite:
β = α + (γ-γ0)
Steigung
n = 1.56
(ohne α = +-40°)
A = 1,560, B = 0,000 (A*x+B)
© by Leybold Didactic GmbH, 1999-2002

Abbildung 1.17: Bestimmung des Brechungsindex von PE. Links der Übergang Luft-PE. Rechts der Übergang PE-Luft

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

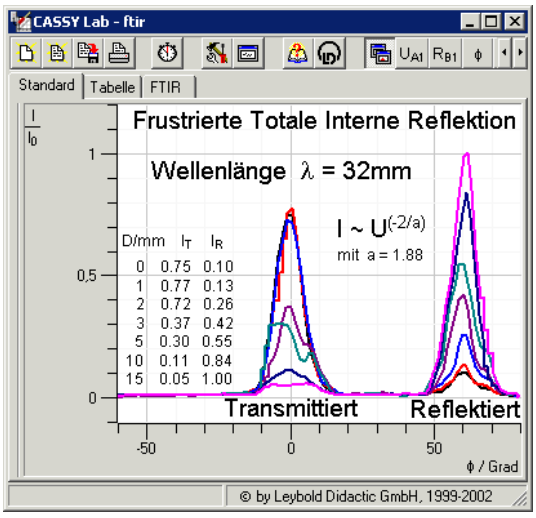
- Sollte sich während der Messungen der Winkel-Nullpunkt γ_0 verschieben, so wird er notiert und von der jeweiligen Messung abgezogen.
- Eine schief einfallende Welle (Justage des Senders) führt zu verschobenen Peaklagen, die durch Mittelung der jeweils zu $+\alpha$ und $-\alpha$ korrespondierenden Ausfallswinkel korrigiert werden kann.
- $\sin\beta$ wird aus den korrigierten Winkeln berechnet
- Wie genau ist die Messung? Dazu die Fehler von Einfalls- bzw. Ausfallswinkel abschätzen (Skalenablesegenauigkeit, Peakbestimmung, Winkelkalibration, Fehlerfortpflanzung).

Optischer Tunneleffekt Der Aufbau zur Messung des Übergangs PE-Luft kann durch einen zweiten Halbzylinder, wie nebenstehend skizziert, ergänzt werden, um einen interessanten Effekt zu demonstrieren: Wegen der Wellennatur der elektromagnetischen Strahlung ist auch für Einfallswinkel oberhalb der Totalreflexion ein transmittierter Strahl zu beobachten, wenn die Lückenbreite D kleiner ist als die Wellenlänge λ.



Dieser Effekt wird auch *frustrierte totale interne Reflexion* – FTIR – genannt und findet in Strahlteilern mit variabler Intensitätsaufteilung Anwendung.
Analog zum quantenmechanischen Tunneleffekt ergibt sich für die transmittierte Intensität $I_T \sim e^{-2\pi D/\lambda}$. Eine Aufteilung im Verhältnis 1:1 ergibt sich somit für $D = \lambda\frac{ln2}{2\pi} \approx \lambda/10$.

Bei einem Einfallswinkel von $\alpha = 60$ Grad kann sowohl der reflektierte als auch der transmittierte Strahl für verschiedene Lückenbreiten D gemessen werden. Nebenstehend ist eine Messung gezeigt (Abstandsbleche verwenden).
Wird nun die Signalhöhe in Intensität umgerechnet, und der transmittierte Anteil logarithmisch über D aufgetragen, liegen die Werte auf einer Geraden mit Steigung $-2\pi/\lambda$. Eine solche Auswertung zeigt Abb. 1.18.



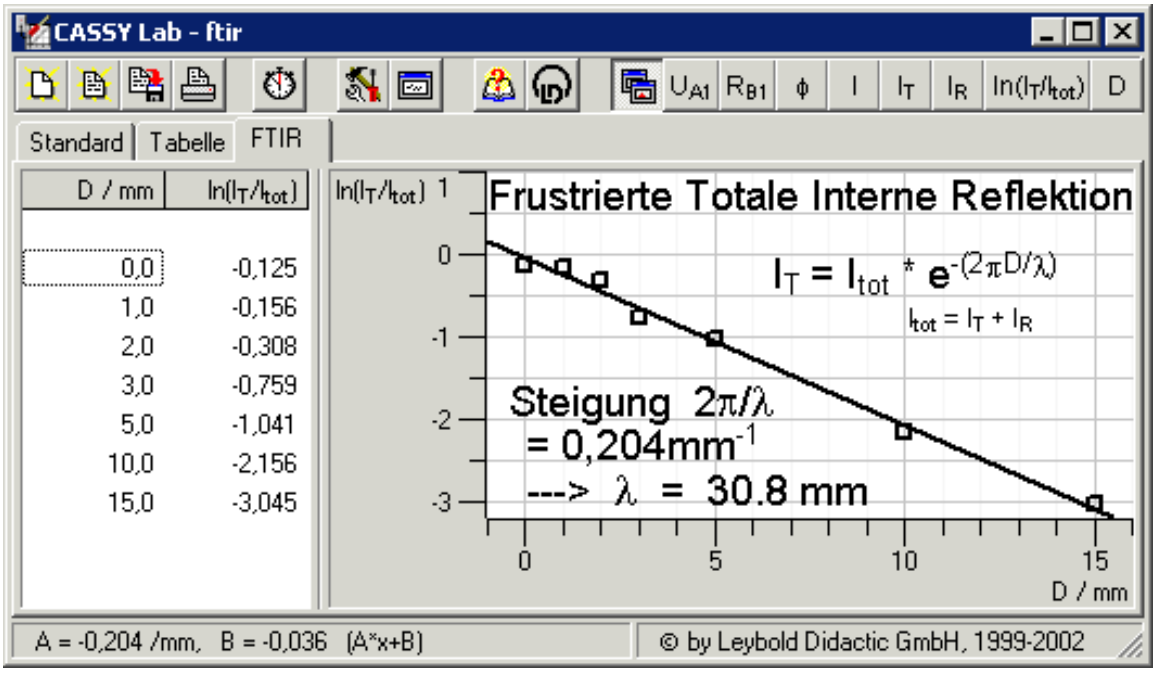


Abbildung 1.18: Frustrierte totale interne Reflexion

Kapitel 2

Optik

2.1 Geometrische Optik & Beugung

2.1.1 Physikalische Grundlagen in Stichworten

sichtbares Licht als elektromagnetische Welle ($350 < \lambda < 700$ nm)
planare, sphärische Wellen, Kohärenzlänge
Überlagerung von Kugelwellen (Huygens-Helmholtz-Kirchhoff)
Lichtausbreitung in Medien, Brechungsindex
optische Abbildungen, paraxiale Optik
Wellenfelder
Wellenfelder hinter Schattenobjekten (Kante, Spalt, ...)
Nahfeld, Übergangsbereich, Fernfeld
Kirchhoffscher Ansatz für die Beugung
Babinetsches Prinzip

Lichtquellen (Laser, LED, Glühlampen, Gasentladungen,...)
Lichtdetektoren (Photozellen, CCD,..)

2.1.2 Versuchsziele

Optische Wellenfelder sind heute einer detaillierten Manipulation zugänglich (CD, CD-RW, wavelength multiplexing, squeezing, Korrektur der Augenlinse,..). Kenntnisse der Amplitude, der Phase sowie die Polarisation eines optischen Wellenfeldes sind erforderlich, um die vielfältige Phänomenologie solcher optischer Anwendungen zu verstehen.
Einfache optische Apparaturen (Teleskope, Mikroskope, ...) transformieren die Energiedichte der elektromagnetischen Strahlung vom Objektraum in diejenige im Bildraum. Dabei kann für System Aperturen sowie Objekte mit Abmessungen groß gegen die Wellenlänge die Näherung der geometrischen Optik verwendet werden. Das bedeutet man betrachtet nur die Normalen der Wellenfronten ("Strahlen") und vernachlässigt alle sich aus der Überlagerung der Wellen ergebende Erscheinungen. Jedoch schon eine elementare Diskussion der Grenzen der Auflösung

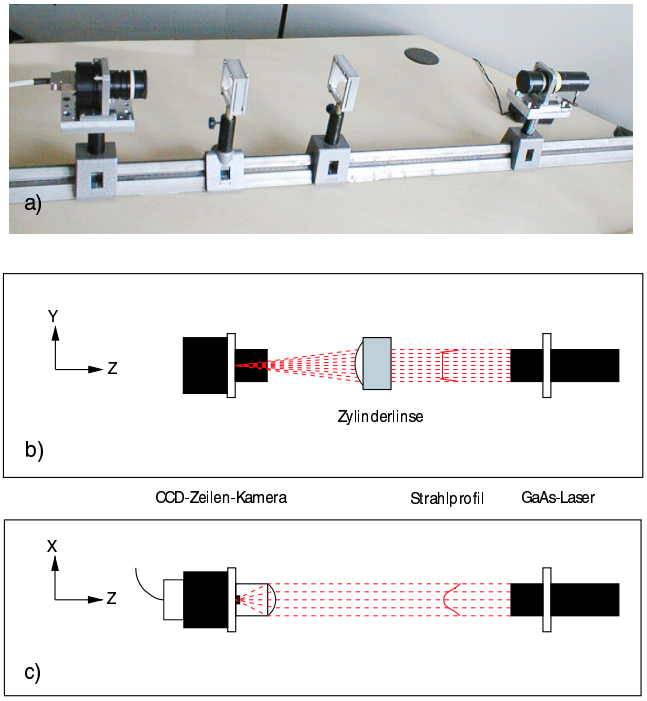


Abbildung 2.1: a) Foto der Versuchsanordnung, GaAs Laser, 2 Linsen, Zeilenkamera aufgebaut auf Dreieckschiene (von rechts nach links) b) Vertikalschnitt durch die Versuchsanordnung c) Horizontalschnitt; das Strahlprofil in diesen Schnitten ist stark unterschiedlich!

optischer Instrumente bedarf einer Diskussion gerade dieser Wellenphänomene - letztendlich beschränkt die Beugung auch die erzielbare sinnvolle Vergrösserung eines jeden Mikroskopes.
Die Beobachtung von Beugungserscheinungen im optischen Wellenlängenbereich wird häufig auf den Kleinwinkelbereich in Vorwärtsrichtung (Fraunhofer) beschränkt. Diese Beobachtungen sind auch mit räumlich nicht kohärenten Strahlungsquellen (Filterlicht, Gasentladungen, ..) möglich. Laser jedoch können grosse räumlich kohärente Strahlungsfelder erzeugen, wenn der gewöhnlich eng gebündelte Strahl mit einer Projektionsoptik aufgeweitet wird.
In diesem Versuch wird eine GaAs Laserdiode (λ = 655 nm) als Strahlungsquelle verwendet (Datenblatt Fa. Schäfter und Kirchhoff www). Das aufgeweitete Strahlungsfeld ist ca. 30 mm hoch (y) und 8 mm breit (x, Koordinatensystem s. Abb. 2.1.b,c). Als Nachweisgerät wird ein einzeiliger CCD Sensor mit 2048 Pixeln (Pixelbreite 14 μm) benutzt. Die Auslesefrequenz des Zeilensensors beträgt typischerweise 10 kHz. Das Daten Auslese Programm zeigt die 2048 Intensitätswerte mit maximal 8 bit Auflösung (Details s. Datenblatt).
Mit diesem Instrumentarium (s. Abb. 2.1a, b, c) können Sie das Verhalten optischer Wellenfelder

1) beim Durchdringen durchsichtiger Strukturen (zylinderförmig und flach)

2) an linearen Kanten und Spalten

beobachten. Details dieses Beobachtungsprogrammes sind weiter unten erläutert.
Die Mechanik des Versuchsaufbaus ist so ausgelegt, daß das Wellenfeld nach der Justage (s.u.) nur entlang der Sensorzeile ausgemessen wird (in y-Richtung).

Bei der Durchführung der Anfangseinstellung der Wellenfeldparameter (s.u.) werden Sie feststellen, daß die Randzonen des Strahlungsfeldes aufgrund der Bündelbegrenzung durch die Frontöffnungen von Quelle und Detektor Beugungserscheinungen zeigen. Diese Regionen müssen Sie bei Ihrer Analyse der durch die zusätzlich in das Wellenfeld eingebrachten Objekte auslassen. Schon kleine Winkelablagen aufgrund der wechselnden Durchbiegung des Tisches und der Dreiecksschiene unter wechselnder Last kann Einfluss auf die beobachteten Intensitätsverteilungen haben. Bemühen Sie sich, sich während der Messungen nicht auf den Tisch zu stützen.
Die im folgenden diskutierten Näherungen sollten bei der Auswertung der Intensitätsmessdaten (s. Abb. 2.5) verwendet werden:

a) Die Schattenobjekte stehen senkrecht im Wellenfeld, d.h. alle Kugelwellen mit Ursprung in der Ebene der Öffnung des Schattenobjektes sind in Phase.

b) Mit dem Laser generierten Wellenfeld können wir Interferenzerscheinungen im Nahfeld beobachten. Dabei untersuchen wir makroskopische Öffnungen / Hindernisse S, deren charakteristische Abmessungen a grösser als die der Fresnellänge r_F ist.

$$r_F \;=\; \sqrt{\lambda \cdot r} \ll a$$

wobei r die optische Weglänge von der Öffnung zum Beobachtungspunkt ist. In diesem Fall sind die Phasenunterschiede $\Delta\Phi$

$$\Delta\Phi \approx ka^2/2r \gg \pi \qquad k = 2\pi/\lambda$$

der von den einzelnen Flächenelementen auf S am Beobachtungspunkt P eintreffenden Wellen bedeutend ($> \pi$).

c) Die optische Weglänge r zwischen einem Punkt $Q = (\xi, \eta)$ in der Öffnungsebene S und dem beobachtungspunkt $P = (x, y)$ in der Detektorebene nähern wir quadratisch.

$$\begin{aligned} r^2 &= (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2 \\ r &\approx z + \frac{(x-\xi)^2}{2z} + \frac{(y-\eta)^2}{2z} + \ldots \end{aligned}$$

Die Feldstärke am Beobachtungspunkt P beträgt (Kirchhoff, Helmholtz)

$$\mathcal{E}(\vec{r_P}) \;=\; \frac{\mathcal{E}(S)}{\lambda} \int_S \tau(\xi,\eta) \frac{e^{ikr}}{r} d\xi d\eta$$

Wir beobachten also die mit Kugelwellen ausgeführte Integraltransformation der Transmissionsfunktion τ in der Öffnung S. Mit der quadratischen Näherung für den optischen Weg r geht diese Transformation in die nachstehende Form über:

$$\mathcal{E}(\vec{r_P}) \;=\; i\mathcal{E}_0\frac{e^{ikz}}{\lambda z}\int_S \tau(\xi,\eta)e^{\left(\frac{ik}{2z}((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)\right)}d\xi d\eta$$

d) Wir skalieren die Ortsvariablen (ξ,η) auf der Öffnung mit der Fresnellänge (z ist der Abstand zur Beobachtungsebene) in der nachfolgenden Form. Zugleich beschränken wir uns auf den eindimensionalen Fall einer halbseitigen einfachen Blende und auf $\tau = 1$.

$$\frac{k}{2z}(x-\xi)^2 := \pi u^2/2, \quad u_0 = u(\xi=0) = \sqrt{\tfrac{k}{\pi z}}x, \quad d\xi = -\sqrt{\frac{\pi z}{k}}du$$

Für die Intensitätskurve findet man:

$$I(x = \sqrt{\frac{\pi z}{k}}u_0) = |\mathcal{E}(x)|^2 = \frac{1}{2}I_0\left|\int_{-\infty}^{u_0} e^{(i\pi u^2/2)}du\right|^2$$

wobei x die Position in der Pixelzeile ist ($x = Pixelno. \times Pixelbreite$).

Das Integral spaltet man wie üblich in den Real und Imaginärteil. Man erhält unter Verwendung der Fresnel Integrale (s. Vorlesung Hebbeker und Maple)

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(u) &:= \int_0^u du' \cos\frac{\pi}{2}u'^2 \\
\mathcal{S}(u) &:= \int_0^u du' \sin\frac{\pi}{2}u'^2 \\
I(x = \sqrt{\frac{\pi z}{k}}u_0) &= \frac{I_0}{2}\left([\mathcal{C}(u_0)+1/2]^2 + [\mathcal{S}(u_0)+1/2]^2\right)
\end{aligned}$$

Das Verhalten der Intensitätskurve macht man sich anhand einer Parameterdarstellung des Vektors $(\mathcal{C}(u),\mathcal{S}(u))$ klar. Man erhält für -$\infty < u < +\infty$ eine Doppelspirale, punktsymmetrisch zum Ursprung. Am Rande des Schlagschatten ($u_0 = 0$) findet man ($I(0) = I_0/4$).

2.1.3 Messwerteerfassung

Die Komponenten dieses Aufbaus sind speziell für den Praktikumsbetrieb eingerichtet worden. Alle Messungen können bei Tageslicht ausgeführt werden. Kleinere Erschütterungen sind zu verkraften, Gewalt oder Nachlässigkeit beim Aufbau der optischen Bank jedoch nicht. Bitte behandeln Sie speziell die Zeilenkamera während der (De)Installation mit Vorsicht. Die Zeilenkamera wird über die USB-Schnittstelle Ihres laptops betrieben. Die Betriebsparameter (Zeilenfrequenz, Offset, etc.)werden über das installierte Programm des Herstellers S&K konfiguriert. Brauchbare Einstellungen sollten Sie vor den eigentlichen Messungen durch explorative Beobachtungen

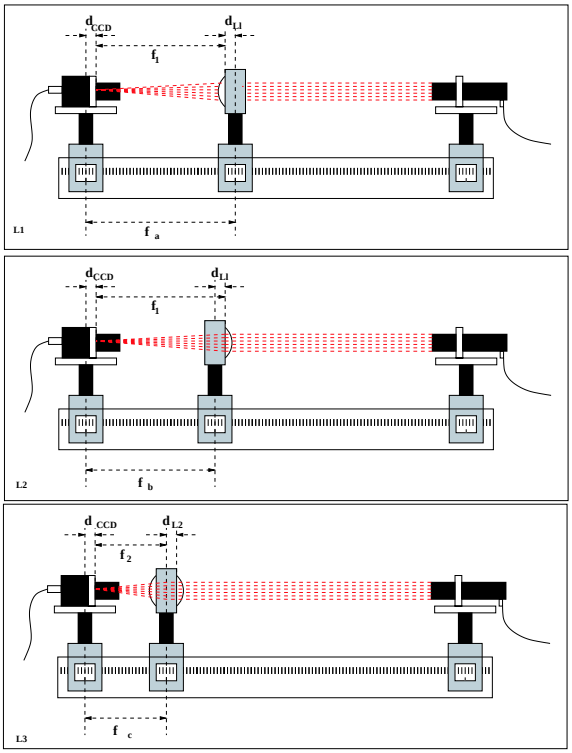


Abbildung 2.2: Untersuchungen zur Brennweite von Zylinderlinsen, L1 & L2 illustrieren das Verfahren zur Bestimmung des Montageversatzes d_L, L3 zeigt die aus 2 plankonvexen Linsen zusammengesetzte Linse

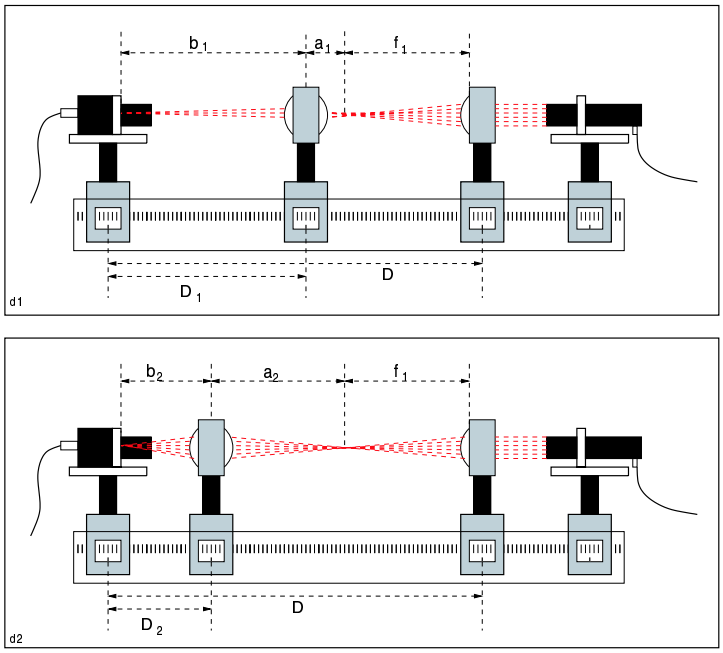


Abbildung 2.3: Linsenpaar im Wellenfeld. Das von der ersten Linse im Abstand D erzeugte Wellenfeld lässt sich auf zwei unterschiedliche Weisen am Ort der Zeilenkamera fokussieren.

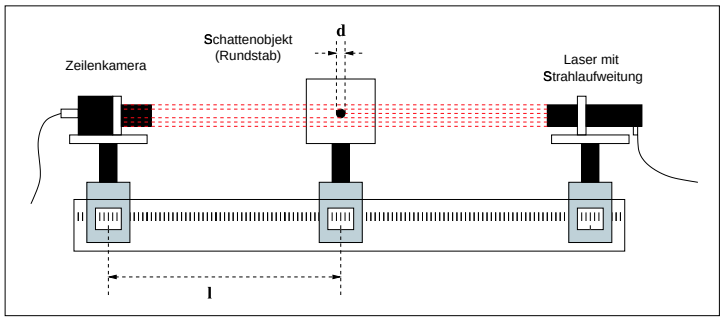


Abbildung 2.4: Beugung an Schattenobjekten.

erkunden. Beachten Sie, dass starke Intensitäsänderungen auftreten können sowohl bei dem Linsenversuch (Brennlinie) als auch bei dem Interferenzversuch (konstruktive Interferenz). Direkte Veränderungen der Intensiät der Laserdiode sollten nur vom Assistenten durchgeführt werden.
Für die durchzuführenden Untersuchungen werden alle optischen Elemente mithilfe von Reitern auf einer Dreikantschiene ("optische Bank") montiert. Bringen Sie zunächst den Laser und die Zeilenkamera auf gleiche Höhe, indem Sie diese Geräte einander gegenüber aufstellen. Kontrollieren Sie die Ausrichtung von Laser und Zeilenkamera. Bringen Sie die Kamera und den Laser an die beiden Enden (ca. 90 cm Abstand), prüfen Sie erneut Position und Ausrichtung. Falls Ihnen das beobachtete Strahlprofil zu inhomogen erscheint, sollten Sie diese Prozedur wiederholen
Auf dem Display können Sie mit dem Programm SKLine (Alias auf dem Desktop) das aktuelle Intensitätsprofil anzeigen (s. Abb. 2.5.a,b,c). In einem ersten Schritt können Sie die die einzelnen Pixel egalisieren ("calibration"). Achten Sie darauf, dass zuvor die Akzeptanz der Zeilenkamera möglichst gleichmässig aus geleuchtet ist.
Einzelbeobachtungen lassen sich in einen *.txt file abspeichern, der hernach mit einem Maple Programm weiter analysiert werden kann. In gleicher Weise lässt sich eine Sequenz von Profilen auf dem Bildschirm darstellen (Grauskalenbild, s. Abb. 2.5.a; Zeilenzahl (scans) kann vorgegeben werden (typisch 400)). Wenn das Grauskalenbild abgespeichert wird enthält der *.txt file alle scan Zeilen (das Format unterscheidet sich leicht von dem eines Einzelscan, Beispiele auf der Praktikums www Seite). Aus den scans eines Grauskalenbildes lassen die Eigenschaften der Zeilenpixel (mittleres Rauschen, Linearität, ...) ermitteln.
Beobachten Sie das Intensitätsprofil an einer Kante (Finger, Rundstab, ...). Identifizieren Sie die Grenzen des geometrischen Schattens. Verschieben Sie das Schattenobjekt auf der Schiene.

2.1.4 Beobachtungsprogramm

1) Beeinflussung der globalen Wellenfeldform durch Verlängerung des optischen Weges

   1a) Linsen, der Einfachheit halber zylinderförmig. Zunächst wird eine halbzylindrische Glaslinse (n=1.5168@587.6 nm, 60 mm breit, 50 mm hoch) auf einen Reiter montiert. Die Linse wird so ausgerichtet, daß ihre Mittelachse mit der des Laserstrahlungsfeldes übereinstimmt (s. Abb. 2.1.b,c). Mit der Linse wird das Wellenfeld auf den CCD Zeilendetektor fokussiert. Bestimmen Sie durch Verschieben die ungefähre Entfernung der besten Fokussierung F (in die optische Bank ist eine Massstab mit mm Teilung

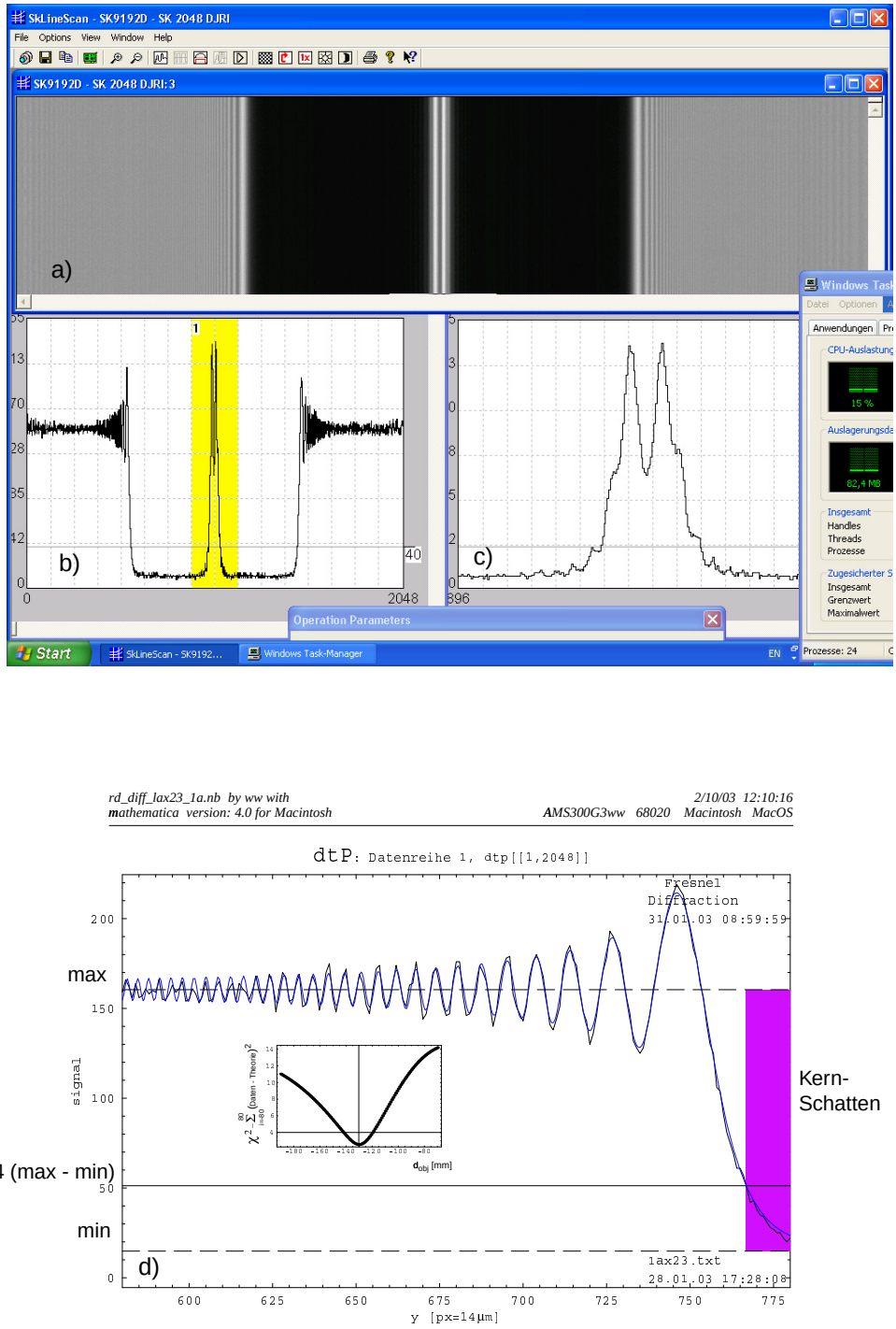


Abbildung 2.5: Bildschirm Aufnahme der Beobachtung der Beugung an 2 eng benachbarten Rundstäben (Durchmesser 6mm), a) 400 scans in Grauskalen Darstellung, das gebeugte Wellenfeld zeigt eine deutliche Einkerbung in der Mitte des Spaltes (c), die Flanken sind über die Beleuchtung im freien Raum überhöht ebenso wie an den Aussenkanten der beiden Rundstäbe (b,c), d) zeigt mit voller Auflösung das Wellenfeld am linken Rande des Stabes. Der Schlagschatten ist durch die kontinuierlich eingefärbte Fläche am rechten Rand markiert. Die Intensität am Rande beträgt 1/4 der Intensität im freien Raume. Das Insert zeigt das χ^2 der Anpassung mit der aus der Cornu Spiralen abgeleiteten Theorie als Funktion der Verschiebung des Schattenobjektes.

integriert). Messen Sie dann mit der CCD Kamera für eine Serie von äquidistanten Schritten D $(\ldots, F-3D, F-2D, F-1D, F, F+1D, F+2D, \ldots)$ die Intensität $I(F+nD)$ des fokussierten Wellenfeldes. Bestimmen Sie die Lage des Maximums der Intensität $I_{max} = I(f_a)$ aus einem Parabelfit an die Daten $I(F+nD)$. Die so beobachtete Brennweite f_a setzt sich aus der eigentlichen Brennweite f und den Verschiebungen (d_{L1}) der Linse sowie des Zeilendetektor (d_{CCD}) zusammen (gegenüber dem Ablesepunkt) s. Abb. 2.2:

$$f_a = f_1 + d_{CCD} + d_{L1}$$

Der Wert für d_{L1} lässt sich durch eine zweite Messung

$$f_b = f_1 + d_{CCD} - d_{L1}$$

mit um 180 Grad gedrehter Linse ermitteln.

Darüberhinaus wird eine 2. Linse mit von der ersten unterschiedlicher Brennweite in derselben Weise vermessen. Diese Linse ist symmetrisch aus 2 Halbzylindern aufgebaut. Deswegen gilt:

$$f_c = f_2 + d_{CCD}$$

Diese 2. Linse ist aus mit der 1. Linse identischen Elementen aufgebaut. Ihre Brennweite sollte ungefähr der Hälfte der 1. entsprechen. Untersuchen Sie ob hier die Korrektur für dicke Linsen angewendet werden sollte:

$$1/f_2 = 1/f_1 + 1/f_1 - 2d_L/(f_1 * f_1)$$

Wiederholen Sie die Messungen von f_1, f_2, d_{CCD}, d_L mehrmals (> 3). Bestimmen Sie die statistischen Fehler. Diskutieren Sie die systematischen Fehler.

Mit den Ergebnissen können Sie die zu erwartetende Fokussierung für die Hintereinanderschaltung dieser Linsen berechnen. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse im Experiment. Beachten Sie, daß es 2 Lösungen für die optimale Fokussierung bei dieser Hintereinanderschaltung gibt s. Abb. 2.3.

1b) optisch glatte Gläser (Dia Rahmen), ohne und mit Entspiegelung

2a) Wellenfelder hinter stabförmigen Objekten homogenisieren/kalibrieren Sie den Zeilenkamera Response. Untersuchen Sie das Rauschen mit und ohne Lasersignal. Montieren Sie den Schattenobjekthalter in einem Reiter zwischen Laser und Kamera. Setzen Sie einen Rundstab (eines der Schattenobjekte) in eine der dafür vorgesehenen Öffnungen (s. Abb. 2.4). Die Rundstäbe decken ca. 20% des Wellenfeldes ab. Machen Sie sich

ein qualitatives Bild der Veränderung der Beugungsfigur, indem Sie das Schattenobjekt von der Kamera zum Laser verschieben. Zeichnen Sie einige Intensitätskurven auf. Prüfen Sie die Homogenität des Wellenfeldes indem Sie das Interferenzmuster des rechten Randes gespiegelt über den linken Rand legen.

Für eine systematische Auswertung werden die Grauskalen Mehrzeilen Scans herangezogen. Finden Sie die Intensität im Schatten I_S und weit ausserhalb der Beugungsfransen I_0 (Ausgleichsgraden an die Messpunkte). Suchen Sie die Position der Pixel mit der Intensität $I_S + (I_0 - I_S)/4$. Die Differenz dieser Positionen ergibt den Durchmesser der Rundstäbe.

Untersuchen Sie wieviele Scans sinnvoller Weise aufgezeichnet werden. Welche Ursachen könnten für die nicht statistischen Fluktuationen der Messergenisse in Frage kommen? Gibt es einen Trend in den Durchmesserergebnissen, wenn das Schattenobjekt von der Kamera auf den Laser zu bewegt wird? Durch Justierfehler bei der Fertigung ist das Wellenfeld der Laserquelle häufig nicht vollkommen parallel. Extrapolieren Sie bei der Beobachtung des Stabdurchmessers Ihre Werte bis auf den Sensor der Zeilenkamera (d.h. unter Benutzung von d_{CCD} aus Teil 1). Vergleichen Sie mit einer mechanischen Messung des Stabdurchmessers (Mikrometerschraube).

Die Genauigkeit der geometrischen Parameter wie der verwendeten Laserwellenlänge haben einen Einfluss auf das Beugungsbild (Ein Zollstock und ein beim Gitterversuch auszuleihendes Strichgitter bekannter Gitterkonstante erlauben eine Bestimmung der Laserwellenlänge mit besser als 1% (5 nm) Genauigkeit). Vergleichen Sie Ihre Daten mit dem Helmholtz-Kirchhoff Modell der Beugung an einer Kante. Versuchen Sie durch systematisches Variieren (quadratische Abweichung) Ihre Modellparameter zu optimieren. Die hohe Empfindlichkeit der Zeilenkamera lässt eine sehr detaillierte Vermessung des Beugungsbildes zu. Einfache Parameter, so die Lage des 1. Maximum in Bezug auf den geometrischen Schatten können durch einen Parabelfit an die Pixeldaten nahe dem Maximum und durch einen linearen Fit in der Nähe der Schattengrenze bestimmt werden. Beobachten Sie diese Lage als Funktion des Abstandes zwischen Schattenobjekt und Kamera. Welcher funktionale Zusammenhang wird erwartet?

2b) Mit 2 Rundstäben können Sie einen Spalt von etwa 1mm Breite realisieren. Das Beugungsbild (s. Abb. 2.5) wird stark abhängig von den optischen Wegen zur Kamera. Wählen Sie eine Einstellung mit einem Maximum bei einer mittleren Position des Reiters. Zeichnen Sie die verschiedenen Beugungsbilder auf. Vergleichen Sie mit der Berechnung (s. Hecht) entsprechend der skizzierten Behandlung der Halbebene.

2.1.5 Sicherheitshinweis

Richten Sie den Versuchsaufbau so aus, dass der Strahl auf die Wand zeigt. Die Leistung der benutzten Laserdiode (< 5mW, Klasse 1) gleicht in etwa der eines Laserpointers. Falls Sie gerade nicht messen, sollten Sie jedoch die die Versorgung der Diode unterbrechen. Die Diode ist ausreichend temperaturstabil, um nach einer Pause auf ca. 5% die zuvor eingestellte Intensität abzugeben. Bitte versuchen Sie nicht, die mit der Diode gekoppelte Strahlaufweitung zu modifizieren. Wie bei der Untersuchung der Linsen gezeigt, lässt sich die Aufweitung weitgehend

rückgängig machen. Sie sollten den kollimierten Strahl nur auf die Zeilenkamera richten. Eine direkte Inspektion mit den Augen muss unterbleiben. Die Auflösung und der Dynamikbereich der Kamera sind ausreichend. Ratschläge zur Lasersicherheit finden Sie bei :
http://accms04.physik.rwth-aachen.de/~wallraff/LasSaf/LasSaf2a20v04d.pdf

2.1.6 Literatur

Lehrbücher

OPTIK. 2., durchges. Aufl.
Hecht, E. Oldenbourg, 1999. 717 S.
ISBN 3-486-25186-4

OPTICS
Englische Ausgabe - 694 S . Addison Wesley Publishing Company 1997
ISBN 02-018-38877

OPTIK, LICHT und LASER.
Meschede, D. Teubner, 1999. 456 S.
ISBN 3-519-03248-1

LEHRBUCH DER EXPERIMENTALPHYSIK. Bd. 3: Optik. 8. Aufl.
Bergmann, L.; Schaefer, C. und Gobrecht, H. (Hrsg.). de Gruyter,
1987. 1117 S.
(Lehrbuch der Experimentalphysik. 3)
ISBN 3-11-010882-8

OPTIQUE : FONDEMENTS ET APPLICATIONS
par Pérez, José-Philippe
avec 250 exercices et problèmes résolus / 669 p.
J.-P. Pérez ; pref. de Françon, M. - 6e ed Paris : Masson, 2000
ISBN 2 10 004890 2

Vorlesungen

Physik III, RWTH, WS 2002/2003, Hebbeker, T. 16-Jan-2003
http://www.physik.rwth-aachen.de/~hebbeker/lectures/ph3_0203/p323_l06/p323_l06.html

http://www.pma.caltech.edu/Courses/ph136/yr2002/
Kip Thorne, bekannt durch seine Forschung zu “Wormholes” und “Timewarps”
Kap. 07 Diffraction

Handbücher

Handbook of Optics
Fundamentals, techniques, and design. Handbook of optics, 1. 2. ed. ; 1995:
ISBN 0-07-047740-X

Devices, measurements, and properties. Handbook of optics, 2. 2. ed. ; 1995:
ISBN 0-07-047974-7

Classical optics, vision optics, x-ray optics. Handbook of optics, 3. 2. ed. ; 2001:
ISBN 0-07-135408-5

Fiber optics and nonlinear optics. Handbook of optics, 4. 2. ed. ;2001:
ISBN 0-07-136456-0

www

`http://www.SuKHamburg.de`
Schäfter und Kirchhoff ist ein Lieferant für Profi Optik im Industrie und Raumfahrteinsatz (u.a. für AMS). Unsere Kamera ist vom Typ SK2048 DJRI. Details zur Funktionsweise können von S&K heruntergeladen werden

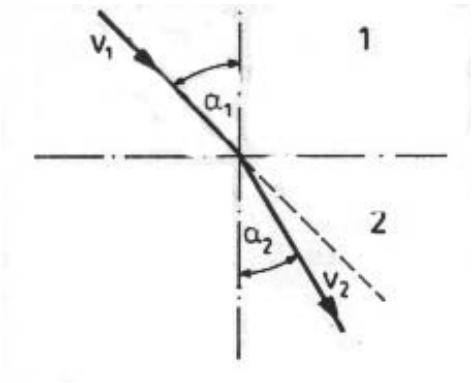


Abbildung 2.6: Lichtbrechung zwischen zwei transparenten Materialien mit $v_1 > v_2$

2.2 Spektrometer

2.2.1 Prismenspektrometer

Aufgabe • Messung des Winkels der brechenden Kante eines Glasprismas • Messung der Dispersionskurve eines Prismas durch Bestimmen der Winkel der Minimalablenkung für verschiedene Spektrallinien • Eichung eines Prismenspektrometers mit Licht bekannter Wellenlängen • Ausmessen des Spektrums einer unbekannten Lichtquelle

Vorkenntnisse Brechungsgesetz von Snellius • Huygenssches und Fermatsches Prinzip • normale und anomale Dispersion • Durchgang von Licht durch ein Prisma • Minimum der Ablenkung • Auflösungsvermögen und Dispersionsgebiet • Strahlengang im Prismenspektrometer • Gasentladung in Metalldampflampen • Emission und Absorption von Licht in Gasen und festen Körpern

2.2.1.1 Grundlagen

a) Brechungsgesetz

Fällt ein Lichtbündel (Normale der Wellenfront) auf die Grenzfläche zweier transparenter Materialien, so tritt neben teilweiser *Reflexion* eine *Brechung* auf, d.h. das Licht wird aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt, s. Abb. 2.6. Der Zusammenhang von Einfallswinkel α_1 und Brechungswinkel α_2, gemessen in Bezug auf das Einfallslot bzw. die Flächennormale, werden durch das *Snelliussche Brechungsgesetz* (1621) beschrieben

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 \qquad \text{Brechungsgesetz .} \tag{2.1}$$

Die Materialkonstante n heißt Brechungsindex oder Brechzahl und ist gegeben durch $n = c/v$, das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten c im Vakuum und v im Material. Von zwei Materialien gilt dasjenige als *optisch dichter*, in dem der Brechungsindex n größer ist. Umgekehrt wird das Material mit dem kleineren Brechungsindex als *optisch dünner* bezeichnet. In Abb. 2.6 ist der Fall $n_1 < n_2$ ($v_1 > v_2$) dargestellt: beim Übergang $1 \rightarrow 2$ in ein optisch dichteres Medium wird der Lichtstrahl zum Einfallslot hin gebrochen.

Eine einfache geometrische Herleitung des Brechungsgesetzes ergibt sich aus dem *Huygensschen Prinzip*: Jeder Punkt einer Wellenfront ist Zentrum einer Kugelwelle und sämtliche Kugelwellen überlagern sich zu einer neuen Wellenfront. An einer Grenzfläche mit $v_1 \neq v_2$ führt dies zu einer Richtungsänderung des Lichtbündels gemäß Gl. (2.1).

b) Dispersion

Die die chemische Bindung vermittelnden äussersten Elektronen, die sowohl die thermischen als auch elastischen Eigenschaften von Festkörpern bewirken, bestimmen ebenfalls die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in diesen Materialien. Die dynamische Wechselwirkung zwischen einer Lichtwelle und dem Elektronensystem in einem im Sichtbaren transparenten Material lässt sich in vielen Fällen durch ein einfaches Dipol-Modell gut beschreiben. Die Phasenverschiebung zwischen der eingestrahlten und der von den Materialatomen wieder abgestrahlten Welle ist die Ursache für das Phänomen Brechung. Darüberhinaus muss Brechung immer wellenlängenabhängig sein ($n = n(\lambda)$), da die Ankopplung der Dipole an die einfallende Welle umso grösser ist je mehr sich die Frequenz dieser Welle einer der Eigenfrequenzen des Dipols annähert. Das wellenlängenabhängige Verhalten des Brechungsindex n wird durch die *Dispersionskurve* $n = n(\lambda)$beschrieben. Dieses Phänomen ist für optische Instrumente wie Linsen und Prismen sehr wichtig. Abb. 2.7 zeigt eine schematische Darstellung einer Dispersionskurve über einen ausgedehnten Wellenlängenbereich. Für die meisten transparenten Medien mit geringer Lichtabsorption, wie Gase, Flüssigkeiten oder Gläser, wächst der Brechungsindex im sichtbaren Spektralbereich mit abnehmender Wellenlänge. Dieses Verhalten bezeichnet man als *normale Dispersion* mit der Eigenschaft $dn/d\lambda < 0$, d.h. blaues Licht wird stärker abgelenkt als rotes Licht, wie man am Regenbogen sieht. In Bereichen mit starker Absorption nimmt n mit wachsender Wellenlänge zu. Diese *anomale Dispersion* mit $dn/d\lambda > 0$ ist mit dem Auge als Strahlungsmessgerät nicht zu beobachten; sie tritt eher im Ultravioletten auf und kann zu Werten $n < 1$ führen (was nicht bedeutet, daß man dann Signalausbreitung mit Überlichtgeschwindigkeit erhält; eine gemeinsame Beschreibung von Lichtabsorption und Transmission führt zu einer komplexen Erweiterung des Brechungsindex $n(\lambda)$ zu $n(\lambda) + ik(\lambda)$, benutzen Sie die empfohlenen Lehrbücher für weitere Information!). Über das gesamte elektromagnetische Spektrum weist das Dispersionsverhalten eines Stoffes stets Bereiche normaler und anomaler Dispersion auf.

Ein qualitatives Verständnis der Dispersion erhält man aus der atomistischen Deutung (Dipol Modell) der dielektrischen Polarisation. Man geht davon aus, daß die Elektronen in einem Material quasielastisch gebunden sind und durch das hochfrequente elektrische Feld $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ einer Lichtwelle aus ihrer Ruhelage ausgelenkt werden. Dies führt zum Aufbau einer zeitlich veränderlichen Polarisation $\vec{P} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 \vec{E}$, wobei die Dielektrizitätskonstante ϵ und der Brechungsindex verknüpft sind über die Maxwell-Relation $n = \sqrt{\epsilon}$. Zwischen dem Polarisationsvektor und der angreifenden Kraft baut sich eine Phasenbeziehung auf, ähnlich wie bei einem klassischen Oszillator. Sei ω_0 die Eigenfrequenz der Elektronen im Material, so folgt im quasielastischen Bereich $\omega \ll \omega_0$ die Auslenkung der Ladung dem Feld, die Polarisation steht in Feldrichtung. Damit erhält man den normalen Fall $\epsilon > 1$ oder $n > 1$. Im quasifreien Bereich $\omega \gg \omega_0$ hingegen können die Ladungen dem anregenden Feld nicht mehr folgen, die Dipolmomente stehen in jedem Augenblick entgegengesetzt zur Feldrichtung. Dies führt zu $\epsilon < 1$ und damit $n < 1$. Der Übergang

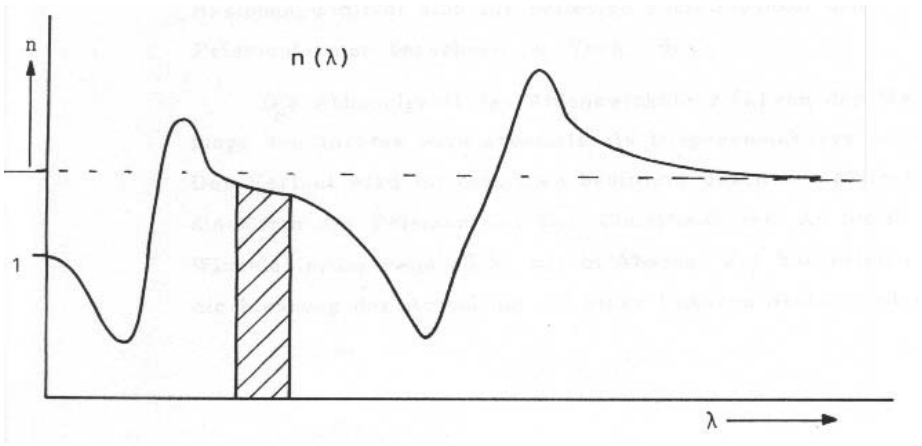


Abbildung 2.7: Schematische Darstellung einer Dispersionskurve $n = n(\lambda)$. Der schraffierte Bereich deutet das sichtbare Spektrum an.

zwischen $n > 1$ und $n < 1$ erfolgt ziemlich rasch in der Nähe der Eigenfrequenz und dieser Bereich großer Absorption kennzeichnet auch die anomale Dispersion. Im allgemeinen hat jedes Material mehrere Eigenfrequenzen ω_{0_i}, deren höchste häufig im Röntgenbereich liegen.

$$n^2 - 1 = \frac{a_1}{1 - \frac{b_1}{\lambda^2}} + \frac{a_2}{1 - \frac{b_2}{\lambda^2}} + a \tag{2.2}$$

Die vorstehende „Sellmaier"- Formel berücksichtigt 2 Eigenfrequenzen bei $\omega_{0_1} = \frac{2\pi c}{\lambda_1} = \frac{2\pi c}{\sqrt{b_1}}$ und $\omega_{0_2} = \frac{2\pi c}{\sqrt{b_2}}$. Mit dieser Formel kann eine Dispersionskurve wie in Abb. 2.7 parametrisiert werden. Die Bereiche normaler und anomaler (in der Nähe der Resonanzen) Dispersion sind durch schwache bzw. starke Absorption gekennzeichnet.

Brechungsindexwerte müssen demnach für bestimmte Wellenlängen angegeben werden, s. Tabelle für einige Materialien. Bei Messungen zur Optik im Praktikum kann Vakuum durch Luft mit $n_L = 1,000$ und vernachlässigbarer Dispersion angenähert werden.

	$\lambda = 656,3$ nm	$\lambda = 589,3$ nm	$\lambda = 486,1$ nm
Wasser	$n = 1,3311$	$n = 1,3330$	$n = 1,3371$
Benzol	$n = 1,4966$	$n = 1,5014$	$n = 1,5132$
Quarzglas	$n = 1,4563$	$n = 1,4584$	$n = 1,4631$
Kronglas	$n = 1,5076$	$n = 1,5100$	$n = 1,5157$
Flintglas	$n = 1,6070$	$n = 1,6102$	$n = 1,6178$

c) Minimalablenkung in einem Prisma

Unter einem optischen Prisma ist ein durchsichtiger Körper zu verstehen, bei dem zwei ebene Begrenzungsflächen einen Winkel miteinander einschließen. Dieser Winkel heißt der brechende Winkel und die Schnittgerade, in der die beiden Ebenen zusammentreffen, heißt die brechende Kante.

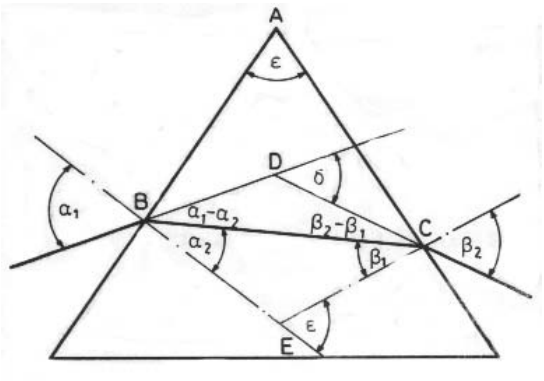


Abbildung 2.8: Strahlengang durch ein Prisma.

In Abb. 2.8 ist der Strahlengang durch ein Prisma mit dem brechenden Winkel ε gezeichnet. Ein monochromatisches, paralleles Lichtbündel treffe unter dem Winkel α_1 gegen das Einfallslot auf das Prisma. Das Lichtbündel wird unter einem Winkel α_2 gebrochen, trifft die andere Begrenzungsfläche unter dem Winkel β_1 und tritt unter dem Winkel β_2 aus dem Prisma aus (zur Verdeutlichung wird empfohlen, die im Literaturanhang zitierten Java Applets auszuführen). An der Eintritts- und Austrittsfläche erfolgt eine Brechung zum Lot hin bzw. vom Lot weg, gemäß

$$\sin\alpha_1 = n\,\sin\alpha_2 \quad \text{und} \quad \sin\beta_2 = n\,\sin\beta_1\ . \tag{2.3}$$

Aus der Skizze läßt sich die gesamte Ablenkung um den Winkel δ ablesen

$$\varepsilon = \alpha_2 + \beta_1 \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\delta &= \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_2 - \beta_1 \\ &= \alpha_1 + \beta_2 - \varepsilon\ .\end{aligned} \tag{2.5}$$

Unter Verwendung von Gl. (2.3) kann nun β_2 durch α_1 ausgedrückt werden. Man erhält den Ablenkungswinkel als Funktion von Einfallswinkel, brechendem Winkel und Brechungsindex

$$\delta = \delta(\alpha_1,\varepsilon,n) = \alpha_1 - \varepsilon + \arcsin\left[\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_1}\,\sin\varepsilon - \sin\alpha_1\cos\varepsilon\right]\ . \tag{2.6}$$

Für ein bestimmtes Prisma (ε und n vorgegeben) nimmt der Ablenkungswinkel dann ein Minimum ein, $\delta = \delta_{min}$, wenn das Prisma symmetrisch vom Licht durchstrahlt wird. Das Licht tritt senkrecht durch die Ebene, die den Winkel ε halbiert. Die zur Minimalablenkung gehörigen Winkel erfüllen die Relationen

$$\alpha_1 = \beta_2 = \frac{\delta_{min}+\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \beta_1 = \frac{\varepsilon}{2}\ . \tag{2.7}$$

Diese Werte werden in das Brechungsgesetz eingesetzt

$$n = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} = \frac{\sin((\delta_{min}+\varepsilon)/2)}{\sin(\varepsilon/2)} \qquad \text{Minimalablenkung} \tag{2.8}$$

Gl. (2.8) dient als Grundlage zur Bestimmung des Brechungsindex. Der Winkel der Minimalablenkung δ_{min} wird gemessen. Der brechende Winkel des Prismas ε muss selbstverständlich ebenfalls gemessen werden.

e) Spektrale Zerlegung des Lichts
Zur Zerlegung des Lichts dienen Spektralapparate. Man unterscheidet Gitterspektrographen und Prismenspektrographen. Beim Gitter werden die Eigenschaften der Beugung ausgenutzt; man erreicht im allgemeinen eine höhere Auflösung als bei Prismen, d.h. eine bessere Trennung von benachbarten Spektrallinien. Die Wirkungsweise von Prismen beruht auf der Dispersion des Lichts aufgrund der Physik der Bindungselektronen in transparenten Materialien; man arbeitet normalerweise mit geringerer Auflösung bei allerdings hoher Lichtstärke.

Als Folge der Dispersion wird weißes Licht durch ein Prisma in seine spektralen Anteile zerlegt. Die Abhängigkeit des Ablenkwinkels $\delta(\lambda)$ von der Wellenlänge des Lichts wird Winkeldispersionskurve bezeichnet. Der exakte Verlauf hängt ab von Material, Geometrie des Prismas und Eintrittswinkel. Mit der Beziehung zwischen Ablenkwinkel und Brechungsindex $\delta(n)$ erhält man aus der Ableitung nach λ die sogenannte Winkeldispersion $d\delta/d\lambda = d\delta/dn \cdot dn/d\lambda$. Der zweite Faktor hängt ausschließlich von den Eigenschaften des Prismenmaterials ab, während der erste Faktor als eine Art Apparatekonstante anzusehen ist.

Eine wichtige Kenngröße des Prismas ist sein Auflösungsvermögen. Es wird definiert als $A = \lambda/\Delta\lambda$ und gibt an, bei welcher Wellenlängendifferenz $\Delta\lambda$ zwei Spektrallinien der Wellenlängen λ und $\lambda + \Delta\lambda$ noch getrennt werden können. Die Auflösung wird durch die Beugungserscheinungen der benutzten meist vom Prisma begrenzten parallelen Lichtbündel eingeschränkt, bei maximaler Ausleuchtung (überprüfen!) also durch die von der Geometrie des Prisma und des Spaltrohres vorgegebene Bündelbegrenzung bei der Beobachtung des Spektrum. Ein wie auch immer begrenztes Bündel kann, wie im vorhergehenden Versuch gezeigt, nur mit Beugungserscheinungen im Randbereich erzeugt werden.
Bei symmetrischem Strahldurchgang (und voller Ausleuchtung) legt das Lichtbündel an der Prismenbasis S den optischen Weg $n\,S$ zurück. Die Lichtwege der beiden Spektrallinien unterscheiden sich dann um $S\,(dn/d\lambda)\,\Delta\lambda$ und dieser Unterschied muß mindestens so groß wie die Wellenlänge λ sein, damit die Linien trennbar sind (eine detailliertere Diskussion der Trennung nach dem Rayleigh-Kriterium findet sich beim Gitterversuch 2.2.2). Das Auflösungsvermögen des Prismas

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = S\,\frac{dn}{d\lambda} \tag{2.9}$$

ist das Produkt aus der Basisbreite S des genutzten Teils des Prismas und der Dispersion $dn/d\lambda$ des Glases. Man beachte, daß Gl. (2.9) unabhängig ist von weiteren geometrischen Größen wie brechendem Winkel oder Einfallswinkel, sofern das Prisma voll ausgeleuchtet ist.

2.2.1.2 Versuchsanordnung

Der prinzipielle Aufbau eines Prismenspektralapparats ist in 2.9 dargestellt. Im Praktikum wird ein Spektrometer-Goniometer verwendet. Der Strahlengang ist schematisch in 2.10 dargestellt. Wir beschränken uns auf die *Frauenhofersche* Beobachtungsweise, bei der man mit parallelen ebenen Wellenfronten arbeitet. Ebene Wellenfronten werden mit einer Kollimatorlinse im „Kollimatorrohr“erzeugt. Im Brennpunkt dieser Linse steht der Kollimatorspalt als in der Intensität regelbare Lichtquelle. Der Kollimatorspalt selbst wird durch eine Kondensorlinse mit einer Gasentladungslampe beleuchtet. Die Beobachtung paralleler Lichtbündel hinter dem Prisma erfolgt

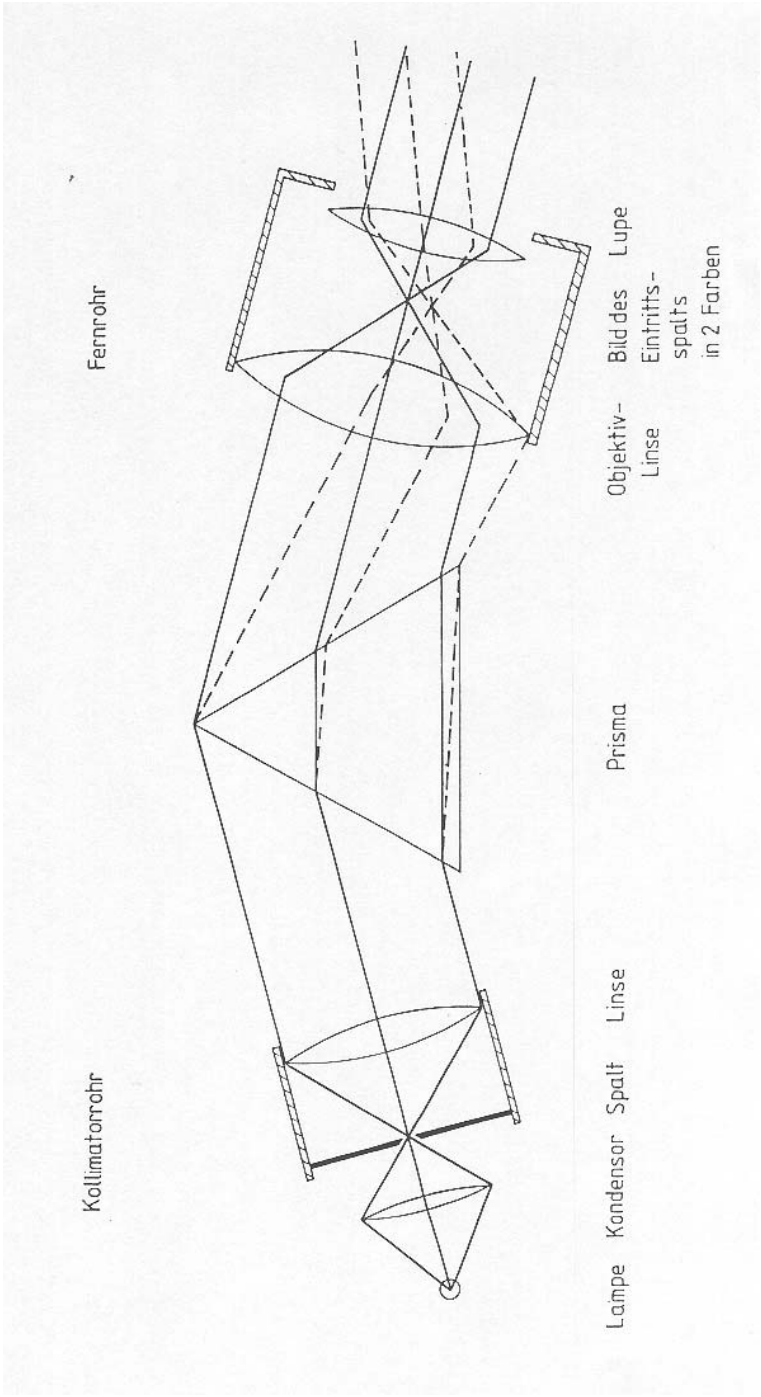


Abbildung 2.9: Strahlengang durch ein Prismenspektrometer.

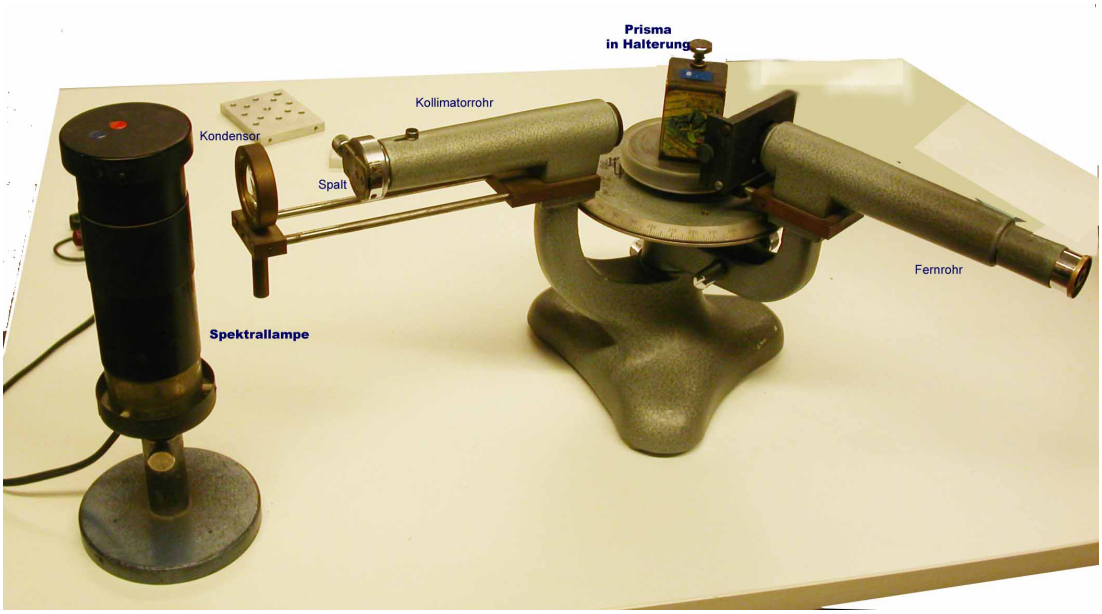


Abbildung 2.10: Strahlengang durch ein Prisma.

dann durch den umgekehrten Prozeß, d.h. durch Abbildung in die Brennebene einer Sammellinse. Das Fernrohrobjektiv erzeugt ein reelles Zwischenbild des Spalts, welches durch das als Lupe wirkenden Okular betrachtet wird, wobei zugleich ein Fadenkreuz scharf erscheint. An dem Fernrohr-Arm ist ein Nonius angebracht, mit dessen Hilfe eine Drehung des Fernrohrs relativ zum Teilkreis auf 1/10 Grad abgelesen werden kann. Durch Markieren der Winkelstellung der Azimutalwinkelstellschraube des Fernrohrs kann die Winkelablesung weiter verfeinert werden. Bei richtiger Einstellung des Spektrometers sieht man durch das Fernrohr die farbigen Bilder des Spalts zusammen mit dem Fadenkreuz.

a) Justierung des Spektrometers

- Einstellen des Fernrohrs
  Das Fernrohr wird auf einen möglichst weit entfernten Gegenstand gerichtet und das Okular wird verschoben, bis dieser Gegenstand scharf erscheint.

- Einstellen des Spaltrohrs
  Das Fernrohr wird so auf das Spaltrohr gerichtet, daß der Spalt im Schnittpunkt des Fadenkreuzes liegt. Dann wird der Spalt verschoben, bis er scharf erscheint.

- Ausrichten des Prismas
  Das Prisma wird so auf den Prismentisch gesetzt, daß die Drehachse der Teilkreisplatte die Winkelhalbierende des brechenden Winkels schneidet. Das Lichtbündel des Kollimatorrohres K soll die brechende Fläche des Prismas voll treffen. Bei beleuchtetem Spalt (Na-Lampe)

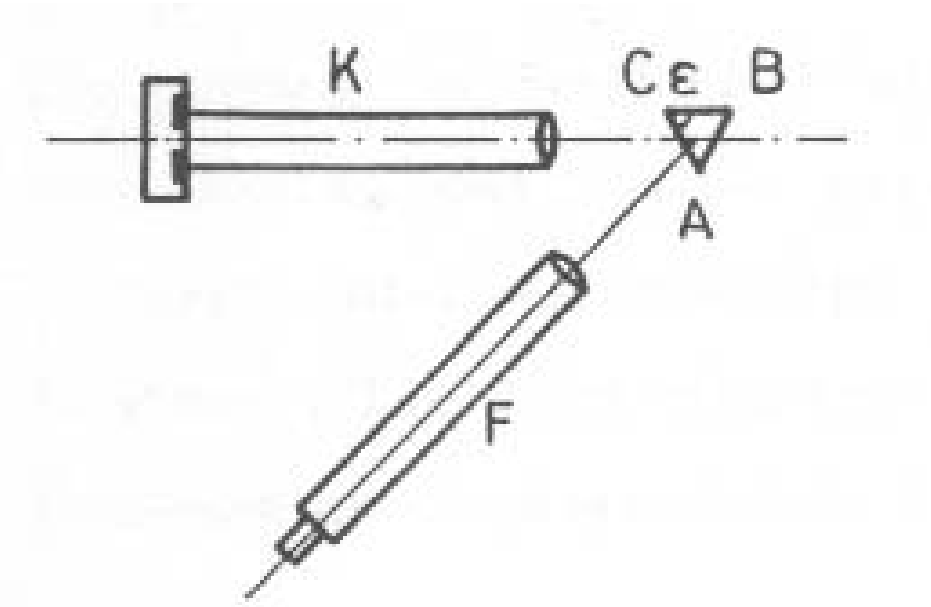


Abbildung 2.11: Ausrichtung des Prismas

wird das Fernrohr so geschwenkt, daß das an der Prismenfläche AC (2.11) reflektierte Licht in das Fernrohr fällt.

Ausserdem sollte man sich bemühen, daß die Drehachse in der Mittelebene des Prisma liegt, d.h. das Spaltbild sollte sich nicht in der Höhe verändern, wenn das Fernrohr geschwenkt wird. Mit Hilfe der Rändelmuttern des Prismentisches wird dieser so justiert, daß die Mitte des Spaltbildes mit dem Schnittpunkt des Fadenkreuzes x übereinstimmt. Bei festgestelltem Fernrohr wird die Teilkreisplatte so gedreht, daß die Reflexion des Lichtbündels an der Fläche BC erfolgt. Auch hier erfolgt die Einstellung der Spaltbildmitte auf dem Schnittpunkt des Fadenkreuzes. Diese Einstellungen werden abwechselnd wiederholt, bis keine Korrektur mehr erforderlich ist.

- Einstellung des Fernrohrs
  Die Arretierungsschrauben von Teilkreistisch und Fernrohr werden gelöst und der Spalt wird mit der Na-Lampe beleuchtet. Dann wird das Prisma so gedreht, daß das vom Spaltrohr kommende Strahlenbündel unter einem spitzen Winkel auf die Prismenfläche auftrifft (Strahl 1 in 2.12). Der Fernrohrarm wird geschwenkt, bis das Spaltbild in der Mitte des Gesichtsfeldes steht und dann festgestellt. Durch Verschieben des Okulars wird das Spaltbild scharf eingestellt. Bei gleicher Stellung des Fernrohrs kann ein zweites Bild des Spalts sichtbar gemacht werden, indem das Prisma gedreht wird (Strahl 3 in 2.12). Lediglich bei symmetrischem Strahlenverlauf (Minimalablenkung, Strahl 2 in 2.12) kann nur bei einer Prismenstellung ein Spaltbild beobachtet werden. In Stellung 3 wird die Schärfe des Spaltbildes durch Verschieben des Spalts gegenüber der Kollimatorlinse nachgestellt. In dieser Stellung erscheint das Bild stark verbreitert gegenüber der Stellung 1. Die Einstellungen werden abwechselnd in der angegebenen Reihenfolge wiederholt, bis keine Korrektur mehr erforderlich ist.

Element	λ [nm]	Farbe	Intensität
Quecksilber (Hg I neutral)	579,07	gelb	22 (mittel)
	576,96	gelb	50 (mittel)
	546,07	grün	244 (stark)
	497,04	blau-grün	1 (schwach)
	491,61	blau-grün	18 (mittel)
	435,83	blau	1000 (stark)
	434,75	blau	89 (mittel)
	433,92	blau	56 (mittel)
	407,78	violett	33 (mittel)
	404,65	violett	400 (stark)
	365,02	violett	620 (stark)
	253,65	ultraviolett	3330 (gefährlich stark)
Helium (He)	706,52	rot	200 (stark)
	667,82	rot	200 (stark)
	587,56	gelb	500 (sehr stark)
	504,77	grün	10 (schwach)
	501,57	grün	100 (mittel)
	492,16	blau-grün	20 (mittel)
	471,31	blau	4 (schwach)
	447,15	blau-violett	200 (stark)
	438,79	violett	10 (schwach)
Cadmium (Cd)	643,85	rot	1000 (stark)
	515,47	blau-grün	3 (schwach)
	508,58	blau-grün	500 (stark)
	479,99	blau	150 (stark)
	467,82	blau	100 (stark)
	466,24	blau	4 (schwach)
Zink (Zn)	636,23	rot	30 (mittel)
	481,05	blau	400 (stark)
	472,22	blau	250 (stark)
	468,01	blau	100 (stark)

Tabelle 2.1: Spektrallinien einiger Elemente, relative Intensitäten nicht von Element zu Element vergleichbar

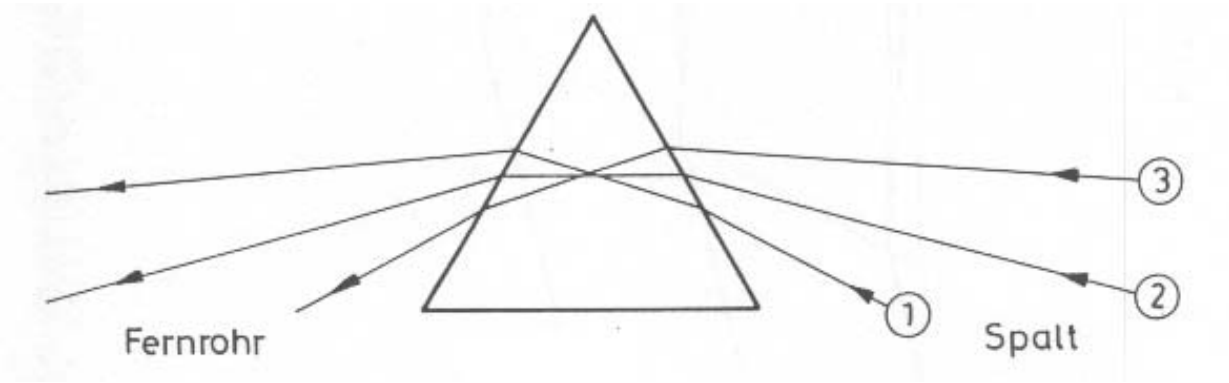


Abbildung 2.12: Wahl des optimalen Strahlengangs durch ein Prisma.

b) Lichtquellen
Als Lichtquellen werden Spektrallampen verwendet, die aus einem mit Edelgas gefüllten Glas- oder Quarzkolben mit eingeschmolzenen Elektroden bestehen. Beim Betrieb mit Wechselstrom wird eine Glimmentladung gezündet, die nach Erwärmung der Elektroden in eine intensiv strahlende Bogenentladung übergeht. Technische Details zu Gasentladungslampen findet man in den Literaturangaben zum Gitterversuch.

Bei den Natrium-, Cadmium- und Quecksilberlampen verdampft das Metall und übernimmt an Stelle des Edelgases die Lichtemission, da die Anregungsenergien der Metalle kleiner als die des Edelgases sind. Nach dem Einschalten der Lampe dauert es daher eine gewisse Zeit, bis die volle Lichtstärke erreicht ist.

Die Spektrallampen werden über eine als Vorschaltwiderstand wirkende Drossel an das Netz angeschlossen. Diese Drossel besitzt besondere Anschlüsse für die verschiedenen Spektrallampen. Es ist darauf zu achten, daß der Stecker in die für die betreffende Spektrallampe vorgesehenen Buchsen gesteckt wird.

2.2.1.3 Versuchsdurchführung

a) Bestimmung des brechenden Winkels
Benutzen Sie die Na Lampe! Das Prisma wird so auf den Prismentisch gesetzt, daß die brechende Kante auf den Kollimator gerichtet ist, s. Abb. 2.13. In dieser Stellung wird Teil I des Lichts an der linken Fläche des Prismas reflektiert, Teil II an der rechten Fläche. Die reflektierten Strahlen I und II werden im Fernrohr beobachtet und der Winkel φ zwischen beiden Strahlen wird gemessen. Aus der Geometrie der Anordnung, sowie dem Hilfsdreieck GAB der Abb. 2.13 folgt

$$\beta + \beta' = \varepsilon \,, \tag{2.10}$$

$$\varphi = \varepsilon + \beta + \beta' = 2\,\varepsilon \,. \tag{2.11}$$

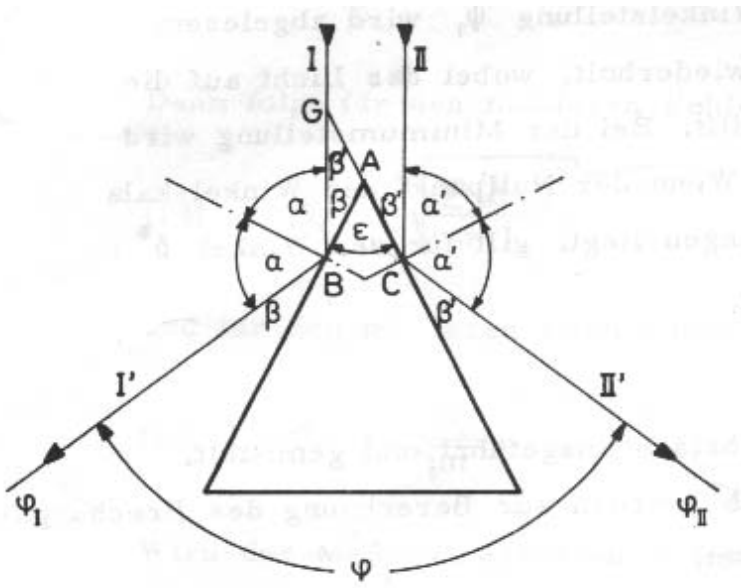


Abbildung 2.13: Bestimmung des brechenden Winkels eines Prismas

Liegt der Nullpunkt der Skala zwischen den beiden Ablesungen φ_I und φ_{II} , so ergibt sich

$$\varphi = \varphi_{II} - \varphi_I + 360^\circ \tag{2.12}$$

und damit der brechende Winkel $\varepsilon = \varphi/2$.

Alle Messungen werden mehrfach durchgeführt. Messen Sie alle 3 Winkel des Prismas! Führen Sie eine Ausgleichrechnung mit der Nebenbedingung der Dreieckwinkelsumme aus. Wie sieht die Messwinkelverteilung vor und nach der Ausgleichsrechnung aus? Jeder Winkel φ_I, φ_{II} kann mit Hilfe des Nonius auf 1/10 Grad genau abgelesen werden! Man mache sich mit der Funktionsweise des Nonius vertraut. Die Einstellschraube am Fernrohr erlaubt die 1/10 Grad Einteilung des Nonius weiter zu verbessern. Eichen Sie die Schraubenumdrehungen, indem bis herausfinden wieviele Umdrehungen für einen Vorschub von 1, 0.8, 0.4, 0.2, -0.2,.., -1 Grad erforderlich sind.

Aus den Einzelwerten ist der Mittelwert $\bar{\varepsilon}$ des Brechungswinkels zu bilden.

b) Bestimmung des Winkels der Minimalablenkung

Zur Messung der minimalen Ablenkung läßt man nach Abb. 2.12 das Licht schräg auf eine Prismenfläche auffallen. Das Bild des Spalts wird im Fernrohr betrachtet. Bei gleichsinniger Drehung von Prismentisch und Fernrohr beobachtet man, daß das Bild des Spalts bei einer bestimmten Stellung seine Richtung umkehrt. Der Umkehrpunkt entspricht dem minimalen Wert der Ablenkung. Die Winkelstellung ψ_1 wird abgelesen. Der gleiche Versuch wird wiederholt, wobei das Licht auf die andere Prismenfläche auftrifft, und bei Minimumstellung wird der Winkel ψ_2 abgelesen. Wenn der Nullpunkt der Winkelskala zwischen den beiden Ablesungen liegt, gilt für

den Winkel δ_{min}

$$2\,\delta_{min} = \psi_2 - \psi_1 + 360^\circ \ . \tag{2.13}$$

Alle Ablesungen ψ_i werden mit einer Genauigkeit von deutlich besser als $0,1^\circ$ mehrfach ausgeführt (Rändelschraube!) und gemittelt. Die Mittelwerte des brechenden Winkels $\bar{\varepsilon}$ und der Minimalablenkung $\bar{\delta}_{min}$ werden zur Berechnung des Brechungsindex in Gl. (2.8) eingesetzt.

Diese Messung der Prismengeometrie soll nur mit der gelben Na Doppel-Linie durchgeführt werden. Die Dispersionskurve wird mit der Hg und der Cd Lampe ausgeführt.

Fehlerrechnung

- Statistische und unsystematische Fehler
  Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der beobachteten Meßwinkel lässt sich durch wiederholte Messung ermitteln. Bestimmen Sie exemplarisch für 2 Meßwinkel (links, rechts) die ersten 4 Momente dieser Verteilung. Vergleichen Sie mit den Erwartungen für eine Gaußverteilung. Verifizieren Sie das erwartete Verhalten des Mittelwertes mit der Anzahl der Messungen (≈ 25, mehr als 1 Beobachter). Für alle andren Winkelmessungen reichen jeweils 4 Einzelbeobachtungen.

  Der Mittelwert des Brechungsindex $\bar{n}$ wird nach Gl. (2.8) berechnet, wobei die Mittelwerte $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\delta}_{min}$ benutzt werden. Da beide Messungen unabhängig voneinander sind, ergibt sich nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz für die Varianz oder das Fehlerquadrat des Brechungsindex

  $$s_n^2 = \left(\frac{\partial n}{\partial \varepsilon}\right)^2 s_\varepsilon^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial \delta_{min}}\right)^2 s_{\delta_{min}}^2 \ . \tag{2.14}$$

  $\partial n/\partial\varepsilon$ und $\partial n/\partial\delta_{min}$ sind die partiellen Ableitungen der Funktion $n(\varepsilon, \delta_{min})$, die sich aus Gl. (2.8) berechnen lassen

  $$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} &= \frac{n}{2}\left(\cot\frac{\delta_{min}+\varepsilon}{2} + \cot\frac{\varepsilon}{2}\right) \ , \\ \frac{\partial n}{\partial \delta_{min}} &= \frac{1}{2}\,\frac{\cos((\delta_{min}+\varepsilon)/2)}{\sin(\varepsilon/2)} \ . \end{aligned}$$

  Man schätze die Größe der Fehler ab und überlege, ob beide Fehlerquellen gleichermaßen berücksichtigt werden müssen.

- Systematische Fehler
  Objektive Fehler, die zu einer systematischen Verfälschung der Messung führen, können zum Beispiel auftreten durch mangelhafte Justierung des Goniometers, fehlerhafte Teilung der Winkelskala, Unebenheiten der Prismenflächen.

  Man schätze die Größenordnung dieser Effekte ab und beurteile ihren Einfluß auf die Bestimmung des Brechungsindex. Ist es gerechtfertigt, systematische Fehlerquellen im Vergleich zu den statistischen Fehlern zu vernachlässigen?

- Ausgleichsrechnung
  Ein 2(3) Polfit nach der Sellmeier Formel ist technisch nicht besonders aufwendig, erfordert aber ein nichtlineares Anpassungsverfahren (nach Levenberg - Marquart z.B.) Aber die Sellmeier Multipol Formel lässt sich im hier abgedeckten Wellenlängenbereich vereinfachen (Cauchy 1825).

$$n(\lambda) = a(1 + \frac{b_1}{\lambda^2} + \frac{b_2}{\lambda^4}) \tag{2.15}$$

  Ein Parabelfit für $n(y = 1/\lambda^2)$ kann nach Angaben der Glashersteller (s. Literatur) die Dispersionskurven auf dem 10^{-4} Genauigkeitsniveau interpolieren. Identifizieren Sie den Glastyp der Ihnen vorliegenden Prismen!

c) Bestimmung der Wellenlängen von Spektrallinien

Zunächst wird eine Spektrallampe, z. B. die Hg-Lampe, angeschlossen. Der Spalt wird vorsichtig geöffnet und die Lampe so vor dem Spalt angebracht, daß dieser voll ausgeleuchtet ist. Im Fernrohr müssen jetzt die Spaltbilder zusammen mit der Skala erscheinen. Der Spalt wird jetzt verkleinert, bis die einzelnen Linien nur noch als farbige Striche zu sehen sind, und die Winkelposition mit Nonius und Stellschraube abgelesen werden kann. Mit Hilfe des Fernrohrokulars werden die Linien auf optimale Schärfe eingestellt. Für die Eichung des Spektrometers werden die Linien von Quecksilber und Cadmium benutzt, deren Wellenlängen in der Tabelle aufgeführt sind. Zur leichteren Identifizierung ist neben der Farbe auch eine grobe Intensitätsklassifizierung angegeben (Vorsicht, Ihr Auge ist nicht linear in der Intensitätswahrnehmung). Als Eichkurve des Spektrometers wird eine Dispersionskurve nach 2.14 angelegt. Man beachte, daß die Winkel mit Hilfe des Nonius und Rändelschraube auf besser als 1/10 Grad genau abgelesen werden können. Mit Hilfe der Eichkurve werden nun die Wellenlängen von Spektrallinien anderer Elemente bestimmt, z. B. die der gelben Natrium-Doppellinie sowie einiger Linien von Neon oder Zn.

Man überprüfe das Auflösungsvermögen eines Prismas gemäß Gl. (2.9) am Beispiel der Na-Doppellinien (Na Spektraldaten: s. Gitterversuch) oder der gelben und blauen Hg Linien. Die Dispersion $dn/d\lambda$ erhält man aus der Eichkurve oder den angegebenen Daten der Prismen. Wie groß kann $\frac{dn}{d\lambda}$ technischer Gläser maximal werden? Man überlege sich, mit welchem der Prismen die erforderliche Auflösung erreicht werden kann und versuche dann, die beiden Linien getrennt zu beobachten. Durch Einschränkung des Strahlengangs am Prisma (Papierblenden) läßt sich die effektive Basisbreite des Prismas vekleinern und damit die Trennung der beiden Linien aufheben.

Fehlerrechnung

Subjektive Fehler entstehen durch ungenaue Ablesung der Linienlage, die mit Hilfe des Nonius und Rändelschraube auf besser als 1/10 Grad genau möglich ist. Sie können untersucht (Fehlerverteilung und ihre Momente) und reduziert werden durch mehrfache Wiederholung der Messungen.

Objektive Fehler, die z.B. durch falsche Justierung und mangelhafte apparative Genauigkeit zu systematischen Verfälschungen führen, sollten durch Vergleich mit den in den Eichlaboratorien gemessenen Werten abgeschätzt werden.

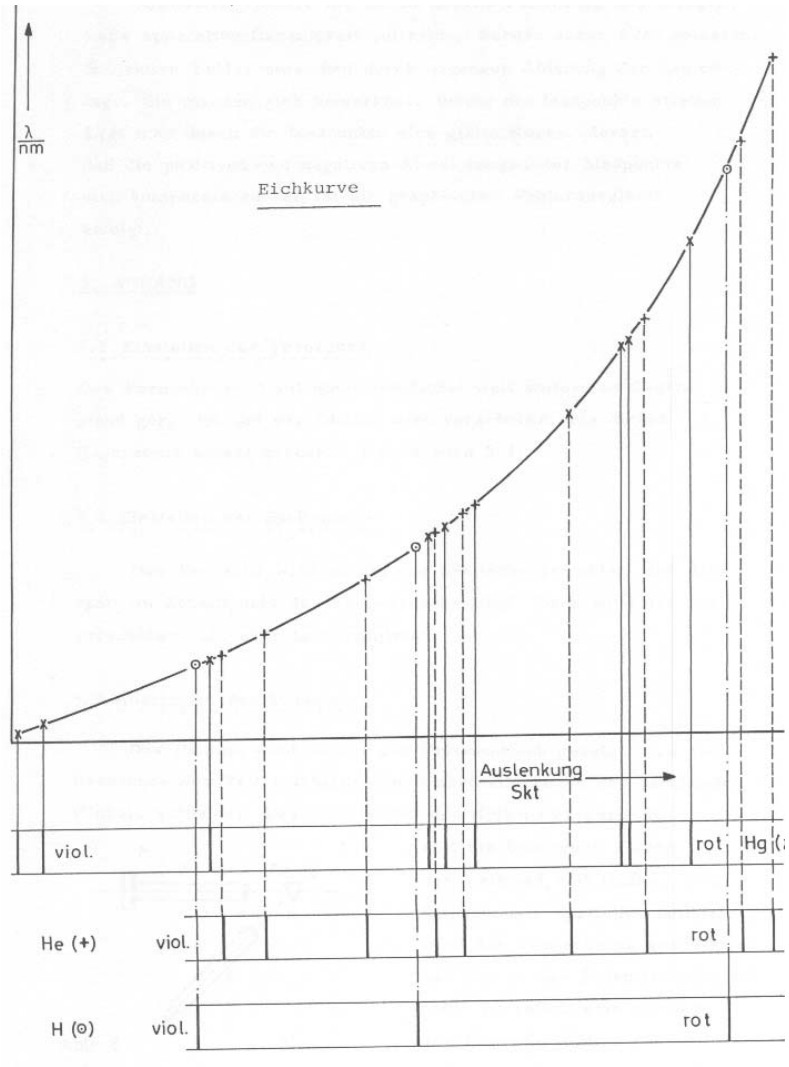


Abbildung 2.14: Eichkurve bzw. Dispersionskurve eines Prismas.

2.2.1.4 Literatur

Lehrbücher
siehe Geometrische Optik und Beugung und auch Gitter

Lehrmaterial Lichtausbreitung in transparenten Materialien

The FEYNMAN LECTURES on physics v.1, Feynman, R. P., Leighton, R.B, Sands, M.
Addison-Wesley, Reading, MA,1963

OPTIQUE, Bruhat, G., 6me édition
Masson, Paris 1997, ISBN 2-2258-2652-8

OPTIK (Eine Einführung), Pedrotti, Frank L.
Prentice Hall, 1996, ISBN 3-8272-9510-6

OPTICAL PHYSICS, 3. ed., Lipson, Stephen G. Lipson, Henry Solomon, Tannhauser, David Stefan:
Cambridge Univ. Press, 1998, ISBN 0-521-43047-X

Refraction by an Equilateral Prism, Olympus Co., Japan
http://http://www.mic-d.com/java/prism/

Dispersion de la lumière par un prisme
http://www.up.univ-mrs.fr/~laugierj/CabriJava/0pjava60.html

Prisme , réflexions multiples
http://www.up.univ-mrs.fr/~laugierj/CabriJava/0pjava11.html

Spektren , Spektraldaten und Spektrometer

SPECTROGRAPH MOUNTINGS, Dearden, St. UK
http://www.astrosurf.com/dearden/Web\%20Pages/Basement\%20Page/Mountings/Mountings\%20Page\%201.htm

siehe auch Gitterversuch

Glaseigenschaften

Sellmeier Gleichung, Falkner, B.
http://en.wikipedia.org/wiki/Sellmeier_equation

Katalog Optisches Glas, Schott, Mainz
http://www.schott.com/optics_devices/german/products/precision_optical_glass.html

SUMITA OPTICAL GLASS DATA BOOK
http://www.sumita-opt.co.jp

OPTICS GUIDE, Material Properties, Melles-Griot, Rochester, N.Y.
http://www.mellesgriot.com/products/optics/mp_1.htm

Ausgleichsrechnung

DATENANALYSE, Brandt, S. : (Mit statistischen Methoden und Computerprogrammen).
4., völlig neu bearb. u. erw. Aufl. ; 1999. Spektrum Verlag Heidelberg [u.a.]; ISBN 3-8274-0158-5

STATISTISCHE und NUMERISCHE METHODEN der DATENANALYSE, Blobel, V. und Lohrmann, E. ,
1998. B.G. Teubner Verlag Wiesbaden; ISBN 3-519-03243-0;

2.2.2 Gitterspektrometer

Aufgabe Messung der Gitterkonstanten eines Strichgitters mit mehreren bekannten Spektrallinien • Bestimmung der Linienspektren höherer Ordnung für eine Wellenlänge

Vorkenntnisse Huygenssches Prinzip • Beugung am Einzelspalt und am Gitter • Auflösungsvermögen eines Gitterspektrometers • Strahlengang im Gitterspektrometer • Linienspektren von Gasen

2.2.2.1 Grundlagen

a) Beugung am Gitter

Die Vektornatur der elektromagnetischen Wellen ermöglicht die Beobachtung einer Vielzahl von Interferenz und Beugungsphänomenen. Da elektromagnetische Wellen über einen weiten Wellenlängenbereich einfach erzeugt und nachgewiesen werden können, haben die hier diskutierten Phänomene Eingang in zahlreiche technische Anwendungen gefunden (Richtfunk, Radar, GPS, optische Fibern, optische Datenspeicher, etc.). Die Beugung und Interferenz an einem Spalt oder Gitter führt zu einer räumlichen Trennung der Spektralkomponenten des einfallenden Wellenfeldes unter verschiedenen Winkeln. Die Geometrie der beobachteten Beugungsfigur ist durch die Geometrie der Sender und Absorber sowie die Wellenlänge und die Form der Wellenfront der einfallenden Strahlung eindeutig bestimmt. Es ist evident, daß auf diese Weise sehr genaue Messungen der Wellenlänge möglich werden (s.), wenn das von einem Gitter erzeugte Wellenfeld an vielen Stellen mit hoher Genauigkeit gemessen werden kann. Wegen der einfachen geometrischen Beziehungen bieten sich interne Konsistenztest der Messungen an, die es ermöglichen die systematischen Fehler klein zu halten. Vor allem aus diesem Grund ist der Gitterspektrograph dem Prismenspektrometer - speziell bei der Anwendung an schwachen Quellen (Astronomie) - weit überlegen. Bei sehr schmalem Spektralbereich kommen auf reinen Interferenzerscheinungen beruhende Vielstrahl-Interferometer für den Nachweis sehr kleiner Signale (Gravitationswellen z. B.) zu Einsatz.

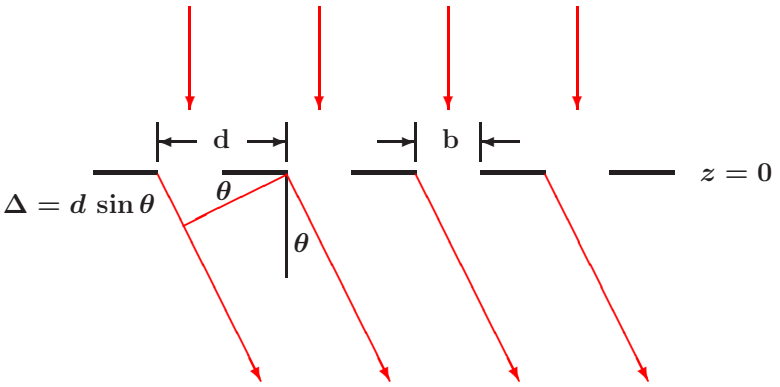


Abbildung 2.15: Beugungsgitter mit N parallelen Spalten, das senkrecht von einer ebenen Lichtwelle beleuchtet wird.

Obwohl sich heute mit aktiven mikrooptischen Bauelementen aus individuellen Quellen zusammengesetzte Antennensysteme - analog zur Hochfrequenztechnik oder zur Wellenmaschine im Vorlesungsdemonstrationsversuch - aufbauen lassen, wird in diesem Versuch das Verfahren der Amplitudenteilung benutzt, um mit einem Beugungsgitter einige Hundert gleichphasige Sender zu realisieren.
Ein klassisches Beugungsgitter besteht aus einer Platte, in die mit einem Diamanten viele eng benachbarte parallele Furchen geritzt wurden. Metallische Oberflächen arbeiten als Reflexionsgitter, bei denen die ungeritzten Stellen die auftreffenden Wellen reflektieren. Wir betrachten in Abb. 2.15 ein Beugungsgitter aus Glas, bei dem das Licht an den ungeritzten Stellen hindurchtritt. Charakteristische Merkmale eines Gitters sind die *Spaltbreite* b eines einzelnen Spalts, die *Gitterkonstante* d als der Abstand zweier Spalte und die Gesamtzahl der Spalte bzw. Striche N. Wir beschränken uns auf die *Frauenhofersche* Beobachtungsweise, bei der man mit parallelen ebenen Wellenfronten arbeitet. Die Normalen auf diese Wellenfronten werden häufig als Lichtbündel bezeichnet. Ebene Wellenfronten werden mit einer Kollimatorlinse im „Kollimatorrohr“erzeugt. Im Brennpunkt dieser Linse steht der Kollimatorspalt als in der Intensität regelbare Lichtquelle . Der Kollimatorspalt wird durch eine Kondensorlinse mit einer Gasentladungslampe beleuchtet. Die Beobachtung paralleler Lichtbündel erfolgt dann durch den umgekehrten Prozeß, d.h. durch Abbildung in die Brennebene einer Sammellinse. Fällt eine ebene Welle senkrecht auf das Gitter, so beobachtet man für Richtungen nahe zur Einfallsrichtung die ursprüngliche Intensität. Unter grösserern Winkeln jedoch bobachtet man die sich aus der Überlagerung der Quellen in den Spalten ergebende Intensitätsverteilung mit ihrer charakteristischen durch den Gangunterschied zwischen gleichphasig schwingenden Antennen bestimmten Struktur. Die elementare quantitative Beschreibung dieser „Beugungsstruktur“fußt auf dem *Huygensschen Prinzip* . Jeder Punkt in der Ebene der Spalte, $z = 0$, ist Ausgangspunkt von elementaren Kugelwellen, die alle in gleicher Phase schwingen. Die Überlagerung sämtlicher Kugelwellen führt zu Interferenzen [1] und zur Bildung neuer Wellenfronten. Wählt man den Beobachtungswinkel θ so, daß der Gangunterschied Δ zwischen zwei in Beobachtungsrichtung aufeinanderfolgenden Wellenfronten gerade ein Vielfaches der Wellenlänge ist, $\Delta = n\,\lambda$, so besteht konstruktive Interferenz und man beobachtet Intensisätsmaxima. Man spricht von „Beugungen“1. Ordnung ($n = 1$), 2. Ordnung ($n = 2$), etc.

Die geometrische Beziehung zwischen Beugungswinkel und den Parametern des Gitters ergibt sich aus Abb. 2.15. Betrachtet man zwei Strahlenbündel aus benachbarten Spalten, die in der Gitterebene den Abstand d voneinander haben und unter dem Winkel θ gebeugt werden, so erhält man als Gangunterschied bzw. Wegdifferenz

$$\Delta = d\,\sin\theta\ . \tag{2.16}$$

Die Bedingung für gleichphasige Überlagerung, zu der alle Spalte gleichermaßen beitragen und das zu einem Intensitätsmaximum der Ordnung $n = 0, 1, 2, 3\ldots$ führt, ergibt sich als

$$d\,\sin\theta = n\,\lambda\ . \tag{2.17}$$

Damit Beugung unter im Labor beobachtbaren Winkeln auftritt, müssen die Wellenlänge des Lichts und die Gitterkonstante d von gleicher Größenordnung, und zwar $\lambda < d$, sein. Da $\sin\theta < 1$,

[1] Zwei elektromagnetische Wellen können miteinander interferieren, wenn sie die gleiche Frequenz bzw. Wellenlänge haben und eine zeitlich konstante Phasenbeziehung zwischen ihnen besteht. Ein Gitter ist nichts anderes als eine regelmässige Anordnung von Antennen die phasenstarr angesteuert werden.

ist die maximal mögliche Ordnung gegeben durch $n_{max} = d/\lambda$, das Verhältnis von Gitterkonstante zu Wellenlänge. Ferner folgt aus Gl. (2.17), daß für langwelliges Licht die Intensitätsmaxima unter größeren Winkeln auftreten als für kurzwelliges Licht. Zudem ist die Beugungsfigur symmetrisch zur Einfallsrichtung so wie auch das Gitter selbst. Bei vorgegebener Wellenlänge ist der Beugungswinkel und damit auch die Trennung naher Spektrallinien um so größer, je enger der Spaltabstand ist. Bei der Brechung durch ein Prisma hingegen wird die spektrale Zerlegung durch die unterschiedlichen optischen Wege im Prismenkörper bewirkt. Dabei besorgt die Atomphysik des Prismenmaterials letztendlich die Dispersion.

b) Intensitätsverteilung des gebeugten Lichts

Die Intensität des Wellenfeldes hinter dem Gitter $I(\theta)$ wird durch zwei sich überlagernde Phänomene bestimmt: Die Interferenz zwischen den Lichbündeln der N Gitterspalte, die als kohärent emittierende Sender aufgefaßt werden können, und die Beugung an den einzelnen Spaltkanten mit dem spalttypischen Intensitätsprofil (s.a. Versuch 1.4). Für die Intensitätsverteilung eines Beugungsgitters erhält man

$$\begin{aligned} \frac{I(\theta)}{I_0} &= H_N(\eta) \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\sin N\,\eta}{\sin \eta} \right)^2 \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 \end{aligned} \tag{2.18}$$

mit den Abkürzungen

$$\eta = \pi(d/\lambda)\, \sin\theta = (d/b)\, \xi \,, \tag{2.19}$$

$$\xi = \pi(b/\lambda)\, \sin\theta \,. \tag{2.20}$$

Die *Interferenzfunktion* $H_N(\eta)$ bestimmt im wesentlichen die Helligkeitsverteilung. Die Hauptmaxima, deren Lage durch Gl. (2.17) gegeben ist, werden mit wachsender Spaltanzahl N immer schmaler und steiler. Die Intensität ist durch den zweiten Faktor in Gl. (2.18) gegeben. Er beschreibt die Beugungserscheinung am Einzelspalt und bewirkt eine 'Modulation' der Hauptmaxima (mit Nullstellen bei $\sin\theta = n\lambda/b$). Zwischen den Hauptmaxima liegen $N-2$ kleine Nebenmaxima, deren Intensität jedoch mit I_0/N^2 abnimmt. Für genügend große N sind diese Nebenmaxima daher vernachlässigbar.

c) Spektrales Auflösungsvermögen

Zur Trennung zweier Spektrallinien der Wellenlängen λ und $\lambda + \Delta\lambda$ nutzt man die Winkeldispersion des Gitters aus. Aus Gl. (2.17) erhält man nach Differentiation

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{n}{d\, \cos\theta} \,. \tag{2.21}$$

Nach dem *Rayleigh-Kriterium* können zwei Linien gerade noch getrennt werden, wenn das Beugungsmaximum der ersten Linie mit dem ersten Beugungsminimum der zweiten Linie zusam-

menfällt.[2] Gemäß Gl. (2.18) entspricht dies für die Interferenzstreifen erster Ordnung der Bedingung $\Delta\eta = \pi/N$. Einsetzen in Gl. (2.19) ergibt

$$\Delta\theta \;=\; \frac{\lambda}{\pi\, d\, \cos\theta}\,\Delta\eta \;=\; \frac{\lambda}{d\, N\, \cos\theta} \tag{2.22}$$

und aus dem Vergleich mit Gl. (2.21) erhält man das Auflösungsvermögen

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = n\, N\ . \tag{2.23}$$

Das spektrale Auflösungsvermögen eines Gitterspektrometers ist gleich dem Produkt aus der Interferenzordnung n und der Anzahl N der beleuchteten Gitterspalte. Es ist unabhängig von der Gitterkonstanten.

2.2.2.2 Versuchsanordnung

Für die Messungen wird ein Gitterspektrometer verwendet, schematisch dargestellt in Abb. 2.16. Durch die Lichtquelle L wird ein verstellbarer Spalt Sp am Kollimatorrohr beleuchtet. Dabei wird eine Kondensorlinse zwischengeschaltet, um den Lichtstrom der Lampe besser auszunutzen. Die Kollimatorlinse K erzeugt aus dem vom Spalt kommenden Licht ein paralleles Bündel, das senkrecht auf das Gitter G fallen soll, das in der Mitte des Spektrometertisches aufgestellt wird. Das gebeugte Wellenfeld wird durch ein um die Spektrometerachse schwenkbares Fernrohr F beobachtet. Die Objektivlinse Ob erzeugt ein Zwischenbild an einer Stelle, in der ein Fadenkreuz eingebaut ist. Fadenkreuz und Spaltbild werden durch das Okular Ok betrachtet. Die Stellung des Fernrohres wird an einer Winkelteilung, die am Umfang des Spektrometers angebracht ist, mit Hilfe des Nonius auf 0,1 Grad genau abgelesen. Durch Markieren der Winkelstellung der Stellschraube kann die Winkelablesung weiter verfeinert werden

Als Lichtquellen werden Gasentladungs(Metalldampf)lampen verwendet. Im Glaskolben brennt zwischen zwei Elektroden ein Lichtbogen in einer dünnen Dampfatmosphäre. Emissionslinien von zwei typischen Lampen sind in der Tabelle 2.2 für die Elemente Na und Hg angegeben. Natriumdampflampen werden in grossem Umfang zur Strassenbeleuchtung eingesetzt. Sie sind praktisch monochromatisch und haben daher einen hohen Wirkungsgrad. Die Quecksilberdampflampe emittiert mehrere Linien, die über das ganze Spektrum verteilt sind. Im täglichen Einsatz sind die Wände von Hg Lampen fast immer mit einem sekundären Phosphor umgeben, um ein sonnenähnliches Spektrum zu erhalten. Zur Entstehung von Spektrallinien und ihren Eigenschaften wird auf die Anfänger Vorlesung und die im Anhang angführte Literatur verwiesen. Eine Übersicht der häufigsten Spektren ist auf den im Literaturanhang zitierten Web-Seiten zu finden. Die Wirkungsweise von Gasentladungslampen sollte anhand der im Literaturanhang aufgeführten Quellen studiert werden.

[2] Bei gleicher Intensität der beiden Spektrallinien ist die beobachtete Einsattelung $1 - 8/\pi^2 \approx 19\%$.

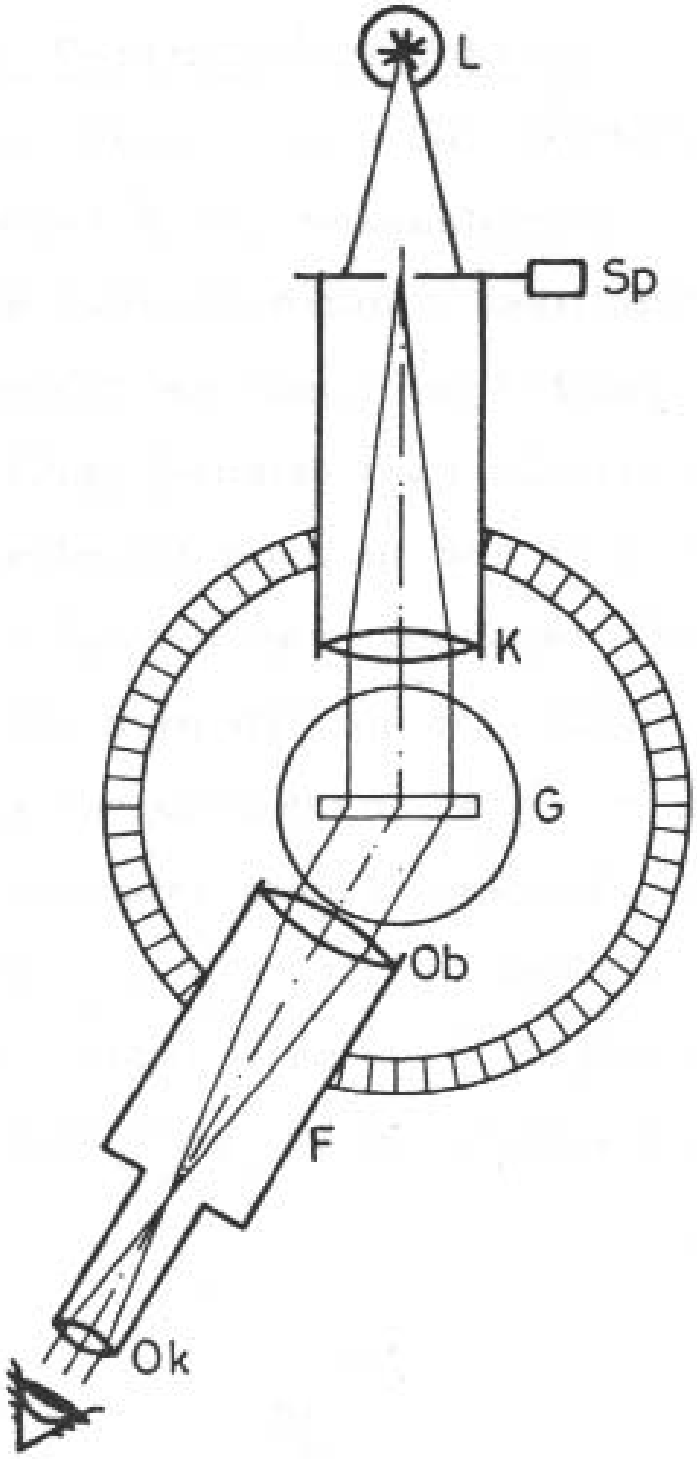


Abbildung 2.16: Schematischer Aufbau eines Gitterspektrometers

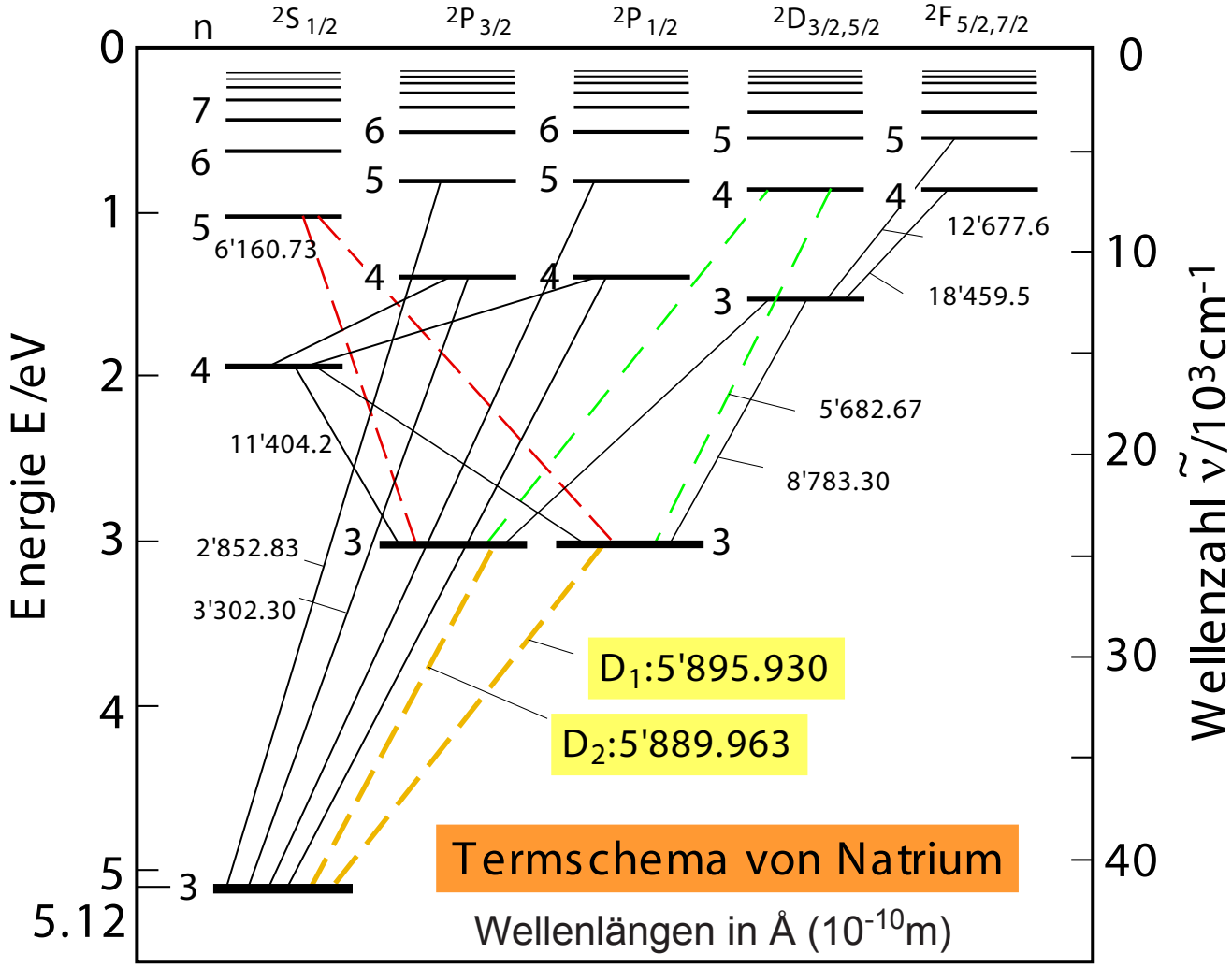


Abbildung 2.17: Energie Niveaus und Übergänge im neutralen Natrium

Element	λ [nm]	Farbe	Intensität
Natrium (Na I neutral)	616,08	gelbrot	3 (mittel)
	615,42	gelbrot	2 (mittel)
	589,59	gelb	500 (mittel) D_1
	589,00	gelb	1000 (stark) D_2
	568,82	gelbgrün	7 (mittel)
	568,27	gelbgrün	4 (mittel)
Quecksilber (Hg I neutral)	579,07	gelb	22 (mittel)
	576,96	gelb	50 (mittel)
	546,07	grün	244 (stark)
	497,04	blau-grün	1 (schwach)
	491,61	blau-grün	18 (mittel)
	435,83	blau	1000 (stark)
	434,75	blau	89 (mittel)
	433,92	blau	56 (mittel)
	407,78	violett	33 (mittel)
	404,65	violett	400 (stark)
	365,02	violett	620 (stark)
	253,65	ultraviolett	3330 (gefährlich stark)

Tabelle 2.2: Spektrallinien von Natrium (s.a. Termschema) und Quecksilber

2.2.2.3 Versuchsdurchführung

Die Beziehung Gl. (2.17) kann dazu benutzt werden, durch Messung des Ablenkwinkels θ entweder die Wellenlänge λ bei bekannter Gitterkonstanten d, oder d bei bekanntem λ zu bestimmen. Hier soll zunächst die Gitterkonstante bestimmt werden. Sie haben 2 Gitter zur Verfügung, die sich in der Gitterkonstanten um eine Grössenordnung unterscheiden. Gitter mit grober Teilung d.h. großer Gitterkonstanten erlauben die Beobachtung mehrerer Ordnungen. Hierzu verwendet man zweckmäßigerweise einfarbiges Licht wie das von Natrium. Bei Gittern mit kleiner Gitterkonstanten bzw. feiner Furchenteilung benutzt man mehrere Linien eines Spektrums in niedrigen (hier ¡ 3) Ordnungen. Es ist durchaus möglich, daß sich die Linien verschiedener Ordnung überschneiden. Bei visueller Beobachtung kann man das an der Farbe leicht erkennen. Die Zuordnung der Wellenlängen zu den farbigen Spektrallinien erfolgt mit Hilfe der Tabelle 2.2.

Die Einrichtung des Spektrometers geschieht auf folgende Weise (Na, Hg hat sehr starke UV Komponenten): Der Spalt wird ca. 0.5mm weit aufgemacht. Die Lampe wird so ausgerichtet, daß sie durch den Kondensor den Spalt voll und gleichmäßig ausleuchtet. Das Fadenkreuz ist fest im Okular eingesetzt und erscheint immer scharf. Das auf Unendlich eingetellte Fernrohr wird jetzt ohne Gitter auf den Kollimator gerichtet. Durch Verschieben des Okulars kann der Spalt scharf eingestellt werden. Die Breite des Spalts wird soweit verringert, daß der Schnittpunkt des Fadenkreuzes noch gut erkennbar ist. Montieren Sie das in einem Glasdiarahmen gefasste Gitter in der Halterung. Achten Sie daruf, daß die Gittebene die Drehachse des Fernrohr enthält. Mit

den Rändelschrauben des Gittertisches (unter der Teilkreisplatte) kann man gegebenenfalls die Neigung verändern, so daß die vom Gitter erzeugten Spaltbilder links wie rechts des einfallenden Strahles auf gleicher Höhe beobachtet werden können, wenn man das Fernrohr schwenkt. Bestimmen Sie mit einem Stück Millimeter Papier die Grösse des ausgeleuchteten Bereiches des Gitter (das Profil des einfallenden Strahlenbündels). Richten Sie die Teilkreisplatte (Tisch mit der Winkelteilung) so aus, daß Sie leicht die Rechts-Links Symmetrie der Ablenkung für die beobachteten Spektrallinien verifizieren können. Kleine Unterschiede lassen sich leicht korrigieren, wenn man die Ausgleichsgerade für die ohnedies aufgenommene $sin\theta$ vs $n \cdot \lambda$ Daten benutzt. Die Einstellschraube am Fernrohr erlaubt die 1/10 Grad Einteilung des Nonius weiter zu verbessern. Eichen Sie die Schraubenumdrehungen, indem bis herausfinden wieviele Umdrehungen für einen Vorschub von 1, 0.8, 0.4, 0.2, -0.2,.., -1 Grad erforderlich sind.

Die Messungen werden mehrfach wiederholt, rechts und links vom Maximum nullter Ordnung. Man protokolliere die Ordnungszahl n, die Wellenlänge λ und den Beugungswinkel θ. Die Gitterkonstante d wird aus dem Inversen der Steigung der ausgeglichenen Messwerte in einem $sin\theta$ vs $n \cdot \lambda$ Graphen bestimmt. Eine Wiederholung der Messungen ist bei sorgfältiger Einstellung des Aufbaus nur dann sinnvoll, wenn Sie Winkelauflösungen von kleiner als 1/10 Grad (mit Hilfe der Einstellschraube) erreichen. Die optische Trennung im Fernrohr ist bei vernünftigen Breiten des Eintrittsspalt mehr als eine Grössenordnung besser. Mithin wird man am Nonius immer dieselbe Einstellung ablesen. Es ist angebracht die Erkundung der Winkel Messwertstreuung auf 3(5) Winkelwerte zu beschränken und nur dort die Messungen 10 - 20 mal zu wiederholen (Beobachter wechseln!).

a) Aufgaben

1. Messung der Gitterkonstanten von zwei Gittern. Benutzen Sie für das Gitter mit der grossen/kleinen Gitterkonstante die Na/Hg Lampe.. Man nutze so viele Ordnungen aus, wie zuverlässig beobachtbar (für das grobe/feine Gitter ca. 20/mindestens2). Man trage für alle beobachtbaren Spektrallinien den Sinus des Ablenkwinkels $\sin\theta$ gegen den Gangunterschied $n \cdot \lambda$, graphisch auf für positive wie negative Ablenkwinkel auf. Aus dem Inversen der Steigung der Ausgleichsgeraden durch die Messpunkte bestimme man die Gitterkonstante d. Der Achsenabschnitt auf der Ordinate des Ausgleichsgeraden ergibt die Abweichung vom senkrechten Einfall auf das Gitter (und sollte wie d unabhängig von der verwendeten Lampe sein) Für 2 Spektrallinien untersuche man die höheren Ordnungen und überprüfe die Gültigkeit der Formel (2.17)..

2. Messen Sie für das mit Na geeichte grobe Gitter die Hg Wellenlängen bei einer sinnvollen Ordnung

3. Messen Sie für das mit Hg geeichte feine Gitter die Na D Linienaufspaltung in 2. Ordnung

4. Unter geeigneter Wahl des Gitters überprüfe man das . Auflösungsvermögen aus Gl. (2.23). Man überlege, welche Auflösung erforderlich ist, um die beiden Na D-Linien zu trennen. Durch Abdeckung mit einer Blende vor dem Gitter kann die beleuchtete Fläche des Gitters stark verkleinert werden und somit die Auflösung verschlechtert werden. Der Einsatz eines

unkalibrierten biologischen Lichtdetektors mit logarithmischer Kennlinie erlaubt nur qualitative Beobachtungen. Man versuche, die beiden Na-Linien getrennt wahrzunehmen und vergleiche das Ergebnis mit der Winkeldispersion aus Gl. (2.21). Man verringere die Anzahl der beleuchteten Gitterspalte so lange, bis die Na-Linien nicht mehr getrennt werden können (mehrere Beobachter!). Man wiederhole diese Beobachtung mit geeigneten Hg-Linien .

Fehlerrechnung Dieser Versuch stützt sich im wesentlichen auf die präzise Mechanik des Gitters und des Goniometers. Intensitäts bedingte Fehler (Unterscheidbarkeit eng benachbarter Spektrallinien) werden wegen der Verwendung von biologischen Lichtdetektoren hier nicht diskutiert. Ein einfacher Geometriefehler, wie er auftritt, wenn das Gitter nicht senkrecht zum einfallenden Lichtstrahl aufgestellt worden ist, lässt sich durch Messungen des Ablenkwinkels mit bekannten Wellenlängen (Gangunterschieden) korrigieren. Gitterfehler (periodische Modulation der Gitterkonstanten, ungleichmässige Transmission, etc) können nur mit quantitativen Intensitätsmessungen aufgefunden werden. Es empfiehlt sich in jedem Fall das Gitter von beiden Seiten und auch kopstehend auszumessen. Dies kann Gangunterschiede verursacht durch die Dia-Rahmen-Fassung des Gitters aufzeigen

Unter der Annhme, daß die Richtung der nullten Ordnung mit beliebig kleinem Fehler hat festgelegt werden können, ermittelt man aus jeder einzelnen Spektrallinie die Gitterkonstante aus Gl. (2.17) zu

$$d = \frac{n\,\lambda}{\sin\theta}\ . \tag{2.24}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Gitterkonstante ist dann ausschließlich durch die der Winkelmessungen θ bestimmt, da die Wellenlängendaten aus den Eichämtern (NIST, PTB) mehr als 3 Grössenordnungen genauer sind, mithin als praktisch fehlerfrei angenommen werden können. Mit Mehrfachmessungen des Winkels wird infolgedessen diese Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung ermittelt und deren Parameter (Mittelwert, Standardabweichung, höhere Momente) bestimmt.

Alternativ bietet es sich an eine Ausgleichsgerade an die Messwerte in der $sin\theta - n \cdot \lambda$ Ebene anzupassen. Da dabei der gesamte Datensatz an Beobachtungswerten für ein Gitter verwendet werden kann, ist es leichter grob herausfallende Messwerte auszusortieren. Die Gitterkonstante ist dann der Kehrwert der Steigung dieser Ausgleichsgeraden über die akzeptierten Messpunkte. Als Gewichte werden die Kehrwerte der an eingen Winkeln beobachteten Varianzen der Winkelmessungen verwendet. Darüberhinaus kann man sich davon überzeugen, das ein Wechsel der Lampe z.B. keinen Einfluss auf die Nulllage (Achsenabschnitt) hat.

2.2.2.4 Literatur

Lehrbücher
siehe Geometrische Optik und Beugung

Lehrmaterial

HANDBUCH der PHYSIK, herausgegeben von Flügge, S., Band XXIV,
Grundlagen der Optik, Françon, M. , Interférences, diffraction et polarisation,
Springer Verlag, Berlin 1956

Physics 15c, Wave Phenomena, Morii, Masahiro
http://huhepl.harvard.edu/~masahiro/phys15c/2002/lectures/

The Optics of Spectroscopy
http://ww.jobynivon.co.uk/jy/oos/oos_ch1.htm

Light Diffraction Through a Periodic Grating, Olympus Co., Japan
http://http://www.olympusmicro.com/primer/java/imageformation/gratingdiffraction/index.html

Airy Patterns and the Rayleigh Criterion, Olympus Co., Japan
http://http://http://www.olympusmicro.com/primer/java/imageformation/rayleighdisks/index.html

Single and Multiple Slit Diffraction
http://hyperphysics.phys-astr.gsu.edu/hbase/phyopt/sinint.html\#c1

Grating properties and defects, Spectra-Physics GmbH, Darmstadt
http://www.gratinglab.com/library/handbook/toc.asp

Spektren und Spektraldaten

ATOMIC SPECTRA and ATOMIC STRUCTURE, Herzberg, G. ,
Dover Publications, ISBN 0-486-60115

EINFÜHRUNG in die ATOMPHYSIK, Finkelnburg, W. ,
Springer Verlag, Berlin 1967, ISBN 3-540-037

Handbook of Basic Atomic Spectroscopic Data, Samsonetti, J.E. and Martin, W.C. ,
National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD 20899
http://physics.nist.gov.PhysRefData/Handbook/intro.htm
http://physics.nist.gov/cgi-bin/AtData/main_asd

Colour Spectra of Elements undergoing electrical discharge excitation
http://astro.u-strasbg.fr/~koppen/discharge/

Lampen

Gasentladungslampen, Falkner, B.
http://www.uni-muenster.de/Physik/TD/Techlex/Techlex/EnergieUWS/Gasentllam/Gasentlamp.htm

Gasentladungslampen (Neon-, Leuchtstoff-, Metalldampflampen)
http://www.elektronikinfo.de/strom/gasentladungslampen.htm\#Seitenanfang

Physics of Light and Color, Sources of Visible Light, Olympus Co., Japan
http://www.mic-d.com/curriculum/lightandcolor/lightsources.html

Kapitel 3

Halbleiter

3.1 Halbleitereigenschaften und Hall–Effekt

Aufgaben:

- Untersuchung des Hall–Effektes im dotierten Halbleiter, Bestimmung der Ladungsträgerdichte.
- Untersuchung der Leitfähigkeit von dotierten Halbleitern, Bestimmung der Beweglichkeit der Ladungsträger.
- Bestimmung der Bandlücke von undotiertem Germanium aus der Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit.

Grundlagen:

Bändermodell, undotierte und dotierte Halbleiter, Hall–Effekt, Beweglichkeit, Leitfähigkeit, Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit.

Literatur:

- Hänsel/Neumann, Physik, Moleküle und Festkörper
- Bergmann/Schäfer, Experimentalphysik 6, Festkörper
- Gerthsen/Vogel, Physik
- Eigenschaften von Germanium: Landolt–Börnstein, Band III/17a, Semiconductors: Physics of Group IV Elements and III–V Compounds; Band III/22a, Semiconductors: Intrinsic Properties of Group IV Elements and III–V Compounds

3.1.1 Theoretische Grundlagen

3.1.1.1 Bändermodell

Festkörper (wir betrachten hier solche, in denen die Atome bzw. Moleküle regelmäßig in einer dreidimensionalen Gitterstruktur angeordnet sind) lassen sich bezüglich ihrer Leitungseigenschaften sehr gut im sogenannten Bändermodell klassifizieren und charakterisieren. Aufgrund der großen Anzahl eng benachbarter Atome befinden sich die äußeren Elektronen nicht mehr in diskreten Energiezuständen. Die periodische Anordnung der Atome mit ihren Elektronenhüllen generieren bei Annäherung breite Energiebereiche, in denen jeder Energiezustand von Elektronen besetzt werden kann. Die Klassifizierung der Festkörper erfolgt nach Lage dieser Bänder und dem Grad ihrer Besetzung, d.h. wie viele der möglichen Zustände besetzt sind. Die Hauptrolle spielen dabei das oberste sogenannte Valenzband, das die äußeren Valenzelektronen enthält, und das Leitungsband, welches das niedrigst gelegene Energieband ist, in dem noch Zustände unbesetzt sind. Insbesondere in den höher liegenden Valenzbändern und im Leitungsband können die Elektronen nicht mehr bestimmten Atomen bzw. Molekülen des Festkörpers zugeordnet werden; sie gehören dem Kristall in seiner Gesamtheit an. Diese Elektronen werden quasifreie oder Kristallelektronen genannt. Ihr Verhalten im Festkörper kann beschrieben werden als seien es freie Elektronen, jedoch mit der Einschränkung, daß sie anstelle ihrer "freien" Masse m_e eine effektive Masse m_e^{eff} haben (infolge ihrer Bindung im Kristall haben sie eine andere Trägheit als ein freies Elektron). Dabei hängt m_e^{eff} von der Bandstruktur ab. In guten Leitern ist $m_e = m_e^{eff}$ eine gute Näherung. In Halbleitern entfaltet dieses Konzept jedoch eine große Stärke (s. Haensel/Neumann).

3.1.1.2 Leiter

Leiter sind solche Materialien, bei denen sich entweder Leitungs- und Valenzband überlappen, oder bei denen im Valenzband noch Zustände unbesetzt sind, so daß Elektronen durch ein äußeres elektrisches Feld sehr leicht in energetisch geringfügig höher liegende Zustände (innerhalb des Valenzbandes) angeregt werden können und zur Leitfähigkeit beitragen. In beiden Fällen ist die Dichte der Leitungselektronen von ähnlicher Größenordnung wie die Dichte der Atome des Festkörpers. Für Kupfer ergibt sich z.B. eine Konzentration der quasifreien Ladungsträger von $\sim 8 \times 10^{22}$ Elektronen pro cm^3 (s. Tabelle 3.1) Die Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerkonzentration ist praktisch vernachlässigbar.
Für die Formulierung des Ohm'schen Gesetzes für elektrische Leiter wird die Leitfähigkeit σ als Proportionalitätskonstante eingeführt:

$$I = \sigma \cdot A \cdot E \tag{3.1}$$

wobei I die Stromstärke durch den Leiter mit der Querschnittsfläche A ist, in dem die elektrische Feldstärke E auf die Ladungsträger (im Metall als frei betrachtete Elektronen) mit Ladung q_e die Kraft $q_e \cdot E$ ausübt. Der Strom wird aufgebaut durch die Elektronen, die sich mit einer als konstant betrachteten (nach Abklingen von Einschaltvorgängen) Driftgeschwindigkeit v_D durch den Leiter in Richtung von E bewegen:

$$I = \frac{dQ}{dt} = n \cdot q_e \cdot A \cdot v_D \tag{3.2}$$

n ist die Ladungsträgerkonzentration (Ladungsträgerdichte). Damit folgt für die Leitfähigkeit

$$\sigma = n \cdot q_e \cdot \frac{v_D}{E} \tag{3.3}$$

Die Driftgeschwindigkeit ist nicht die mittlere Elektronengeschwindigkeit im betrachteten Leitermaterial (s.u.).
Da das Ohm'sche Gesetz verlangt, daß die Leitfähigkeit nicht von der angelegten elektrischen Feldstärke abhängt, muß v_D proportional zu E angesetzt werden:

$$v_D = \mu \cdot E \tag{3.4}$$

Die materialabhängige Größe μ heißt Beweglichkeit (Dimension m^2/Vs bzw. cm^2/Vs). Für die Leitfähigkeit wird damit

$$\sigma = q_e \cdot n \cdot \mu \tag{3.5}$$

In Leitern (Metallen) ändert sich die Ladungsträgerdichte mit der Temperatur nur äußerst geringfügig, so daß die Diskussion der Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit auf diejenige der Beweglichkeit beschränkt wird.
Die angenäherte Konstanz von v_D ergibt sich daraus, daß die durch das elektrische Feld E beschleunigten Elektronen mit dem Gitter des Leiters wechselwirken und ihre vom Feld aufgenommene Energie an dieses abgeben. Liegt das mittlere Zeitintervall zwischen zwei Stößen bei τ_e, so ergibt sich für v_D aus der Gleichung

$$m_e \cdot v_D \cdot \tau_e^{-1} = q_e \cdot E \tag{3.6}$$

die Driftgeschwindigkeit zu

$$v_D = \frac{q_e \cdot E}{m_e} \cdot \tau_e \tag{3.7}$$

Die Wegstrecke, die ein Elektron zwischen zwei Stößen im Mittel zurücklegt, wird als mittlere freie Weglänge λ_e bezeichnet. Sie hängt mit τ_e über die mittlere Elektronengeschwindigkeit zusammen:

$$\lambda_e = \bar{v} \cdot \tau_e \tag{3.8}$$

Damit wird

$$\sigma = q_e^2 \cdot \frac{n}{m_e} \cdot \lambda_e \cdot \frac{1}{\bar{v}} \tag{3.9}$$

$\bar{v}$ ist nicht v_D. Klassisch betrachtet sind die freien Elektronen im thermodynamischen Gleichgewicht mit den Gitteratomen bzw. Gitterionen; ihre Energie gehorcht einer Boltzmann-Verteilung mit dem Mittelwert $\frac{1}{2}m_e\bar{v}^2 = \frac{3}{2}k_BT$, wobei k_B die Boltzmann-Konstante und T die Temperatur bedeuten. Es ergibt sich also

$$\sqrt{\bar{v}^2} \approx \bar{v} \sim \sqrt{T} \tag{3.10}$$

Die freie Weglänge ist bestimmt durch die Stoßwahrscheinlichkeit $w_{stoß}$ der Elektronen mit den Gitteratomen: $\lambda_e \sim \frac{1}{w_{stoß}}$. Daß $w_{stoß}$ linear mit der Temperatur zunimmt, läßt sich auf folgende Weise plausibel machen: bei T beträgt die mittlere Schwingungsenergie der Gitteratome $k_B \cdot T$, die sich je zur Hälfte auf die kinetische und auf die potentielle Energie verteilt, wobei letztere proportional ist zum Quadrat der Auslenkung aus der Ruhelage. Daher ist die Stoßfläche, die ein

Metall	σ	n_e	λ_e	μ_e	Θ_D
	$\Omega^{-1}cm^{-1}$	$10^{22}cm^{-3}$	$10^{-6}cm$	$cm^2V^{-1}s^{-1}$	K
Cu	$6.5 \cdot 10^5$	8.5	4.3	47	310
Ag	$6.7 \cdot 10^5$	5.8	5.7	72	220
Au	$5.0 \cdot 10^5$	5.9	4.2	53	175
Na	$2.3 \cdot 10^5$	2.5	3.6	57	160
Cs	$5.3 \cdot 10^5$	0.9	1.0	37	40

Tabelle 3.1: *Charakteristische Daten für einige Metalle: Leitfähigkeit σ für $0°\,C$, Dichte n_e und mittlere freie Weglänge λ_e der quasifreien Elektronen, Elektronenbeweglichkeit μ_e für $300\,K$ und Debye-Temperatur Θ_D.*

schwingendes Gitteratom für das Elektron bildet, proportional zu T, und da $w_{stoß}$ proportional zur Stoßfläche ist, folgt $w_{stoß} \sim T$. Insgesamt erwartet man also

$$\sigma \sim T^{-\frac{3}{2}} \tag{3.11}$$

Experimentell wird jedoch beobachtet, daß

$$\sigma \sim T^{-1} \tag{3.12}$$

und entsprechend ergibt sich experimentell für den spezifischen Widerstand $\rho = \frac{1}{\sigma}$ und damit auch für den Ohm'schen Widerstand R:

$$R \sim T \tag{3.13}$$

Die quantenmechanische Behandlung des Problems liefert die experimentell beobachtete Temperaturabhängigkeit: die Energien der Elektronen sind nicht Boltzmann-verteilt, sondern gehorchen der sogenannten Dirac-Verteilung mit der Folge, daß $\bar{v}$ in Gl. 3.9 durch die sogenannte Fermigeschwindigkeit zu ersetzen ist, die nahezu temperaturunabhängig ist. Bei Leitern ist daher das Temperaturverhalten der Leitfähigkeit ausschließlich durch die freie Weglänge bestimmt, und damit wird $\sigma \sim \frac{1}{T}$.
Quantitativ wird für hohe Temperaturen die Temperaturabhängigkeit von R parametrisiert durch

$$R(T) = R_\Theta \cdot \frac{T}{\Theta_D} \tag{3.14}$$

wobei die Debye-Temperatur Θ_D das Material charakterisiert. Bei tiefen Temperaturen in der Nähe der Sprungtemperatur, die den Übergang zur Supraleitung angibt, wird $R \sim \frac{T}{\Theta_D}^5$. Tabelle 3.1 zeigt charakteristische Daten für einige Metalle.

3.1.1.3 Isolatoren

Isolatoren sind u.a. Festkörper mit großer Bandlücke (=Energiedifferenz) zwischen höchstem Valenzbandzustand und (bei tiefen Temperaturen) nur geringfügig besetztem Leitungsband. Es gibt praktisch keine quasifreien Elektronen. Für die thermische Anregung bei der Temperatur T gilt für die Übergangswahrscheinlichkeit w aus dem Valenz- in das Leitungsband

$$w \sim e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}} \tag{3.15}$$

Stoff	$\frac{\sigma}{\Omega^{-1}cm^{-1}}$
Diamant	10^{-16}
Bernstein	$< 10^{-20}$
Quarzglas	$< 10^{-19}$
Hartgummi	10^{-16}

Tabelle 3.2: *Leitfähigkeit einiger Isolierstoffe bei 300 K.*

und die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit von Isolatoren zeigt generell ein entsprechendes Verhalten:

$$\sigma \sim e^{-\frac{\Delta W_{Iso}}{k_B T}} \tag{3.16}$$

wobei allerdings ΔW_{Iso} i.A. nicht mit einer Bandlücke identifizierbar ist. Die Tabelle 3.2 zeigt die Leitfähigkeit einiger Isolierstoffe.

3.1.1.4 Undotierte Halbleiter

Reine, undotierte Halbleiter sind schlechte Leiter (z.B. Silizium). Sie weisen eine kleine Bandlücke zwischen voll besetztem Valenzband und nicht- (bzw. geringfügig durch thermische Anregung) besetztem Leitungsband auf. Bei der Anregung vom Valenz- in das Leitungsband entsteht im Valenzband eine Lücke (ein Defektelektron oder Loch), das als positiver Ladungsträger zur Leitfähigkeit beiträgt. Die Gl. 3.5 für die Leitfähigkeit ist demgemäß zu modifizieren:

$$\sigma = q_e \cdot (n\mu_n + p\mu_p) \tag{3.17}$$

Dabei sind n und p die Elektronen- und Löcher-Konzentrationen und μ_n und μ_p die zugehörigen Beweglichkeiten. Im Gegensatz zu metallischen Leitern können die Ladungsträger nicht mehr als frei angesehen werden. Das Konzept der effektiven Masse erlaubt es, Ladungsträger-Konzentrationen sowie das Verhalten der Halbleiter bei Anwesenheit äußerer elektrischer und magnetischer Felder theoretisch zu behandeln.
Die Neutralitätsbedingung für undotierte Halbleiter fordert

$$n = p = n_i \tag{3.18}$$

n_i heißt Eigenleitungskonzentration oder Inversionsdichte. Theoretisch erhält man für n_i den folgenden Ausdruck:

$$n_i \sim (m_n^{eff}\ m_p^{eff})^{\frac{3}{4}} T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta E}{2k_B T}} \tag{3.19}$$

wobei m_n^{eff}, m_p^{eff} die effektiven Massen der Elektronen und der Löcher, T die Temperatur und ΔE die Bandlücke zwischen Valenz- und Leitungsband bedeuten. Die Kristalleigenschaften gehen über ΔE und über die effektiven Massen in diesen Ausdruck für die Eigenleitungskonzentration ein. Die Temperaturabhängigkeit hat also die Form

$$n_i = n_\circ T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta E}{2k_B T}} \tag{3.20}$$

Die Beweglichkeiten μ_n und μ_p sind auch für reine undotierte Halbleiter sehr schwer zu berechnen. Messungen zeigen, daß sie zum Teil drastisch voneinander verschieden sind, wobei i.A. $\mu_n > \mu_p$

Substanz	ΔE	n_i	μ_n	μ_p	$\frac{m_n^{eff}}{m_e}$	$\frac{m_p^{eff}}{m_e}$
	eV	cm^{-3}	$cm^2V^{-1}s^{-1}$	$cm^2V^{-1}s^{-1}$		
Ge	0.67	$2.3 \cdot 10^{13}$	3900	1900	0.56	0.37
Si	1.10	$1.3 \cdot 10^{10}$	1500	600	1.08	0.59
Diamant	5.47	$6.7 \cdot 10^{28}$	1800	1600	0.2	0.25
InSb	0.16	$1.5 \cdot 10^{16}$	78000	750	0.036	0.18
GaAs	1.43	$1.3 \cdot 10^{6}$	8500	400	0.17	0.6

Tabelle 3.3: *Charakteristische Daten einiger Halbleiter bei 300 K: Energielücke ΔE, Inversionsdichte n_i, Ladungsträgerbeweglichkeiten μ_n und μ_p, effektive Massen von Kristall- und Defektelektronen.*

ist. In der Tabelle 3.3 sind die charakteristischen Größen einiger undotierter Halbleiter aufgelistet. Die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit ist gegeben sowohl durch diejenige der Dichten n und p (Gl. 3.19) als auch der Beweglichkeiten. Wie beim Leiter sind die Beweglichkeiten bestimmt durch die Wechselwirkungen der Ladungsträger mit dem Gitter, wobei wegen der (im Verhältnis zum Leiter) geringen Konzentration in Gl. 3.9 nicht die Fermigeschwindigkeit, sondern die thermische Geschwindigkeit maßgeblich ist. Damit ergibt sich für den Halbleiter eine Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeiten gemäß Gl. 3.11 zu

$$\mu_n, \mu_p \sim T^{-\frac{3}{2}} \tag{3.21}$$

Für die Leitfähigkeit (Gl. 3.17), die die Produkte aus Konzentrationen und Beweglichkeiten enthält, folgt damit die folgende Temperaturabhängigkeit:

$$\sigma_i = \sigma_{io} e^{-\frac{\Delta E}{2k_B T}} \tag{3.22}$$

Für einen undotierten Halbleiter läßt sich also durch die Messung der Temperaturabhängigkeit von σ die Bandlücke experimentell bestimmen. Für die bekannteren Halbleiter sind die Bandlücken sowie einige weitere Parameter in der Tabelle 3.3 angegeben. Eine Messung der Leitfähigkeit selbst

$$\sigma_i = q_e n_i (\mu_n + \mu_p) \tag{3.23}$$

liefert das Produkt aus Inversionsdichte und der Summe der Beweglichkeiten, jedoch nicht Dichten und Beweglichkeiten getrennt.

3.1.1.5 Dotierte Halbleiter

Die Leitfähigkeit reiner Halbleiter kann gezielt verändert werden durch Dotierungen, d.h. durch Hinzufügung von Stoffen aus benachbarten Gruppen des Periodensystems der Elemente. Solche dotierten oder Störstellen-Halbleiter weisen dann eine geänderte Bandstruktur auf.
Wird Silizium z.B. mit Arsen (5. Gruppe) dotiert, so entsteht unterhalb des leeren Leitungsbandes ein Niveau, das vom 5. Valenzelektron des Arsens herrührt. Diese Zustände heißen Donatorniveaus, weil sie Elektronen an das Leitungsband abgeben. Es entstehen keine Löcher im Valenzband. Der Halbleitertyp heißt negativer oder n-Halbleiter. Je näher das Donatorniveau an

der unteren Leitungsbandkante liegt, umso größer ist die Elektronen-Leitfähigkeit des dotierten Halbleiters. Für Arsen-dotiertes Silizium liegt das Donatorniveau um $\Delta E_D = 0.049$ eV unterhalb der Leitungsbandunterkante; selbst bei geringer Dotierung (Größenordnung 10^{-6}) ändert sich die Leitfähigkeit sehr stark.
Bei einer Dotierung von Silizium mit einem Element der 3. Gruppe des Periodensystems, z.B. Bor, entsteht eine Bandstruktur, die oberhalb des gefüllten Valenzbandes nicht besetzte Zustände aufweist, in die leicht Elektronen aus dem Valenzband übergehen können. Diese Niveaus heißen Akzeptorniveaus, der Halbleiter heißt positiver oder p-Halbleiter. Für eine Dotierung von Silizium mit Bor beträgt die Energielücke zwischen Akzeptorniveau und Valenzbandoberkante $\Delta E = 0.045$ eV.
Bei dotierten Halbleitern sind also die Elektronen- und Löcherkonzentrationen i.A. nicht mehr gleich. Die Leitfähigkeit wird

$$\sigma = q_e(n\mu_n + p\mu_p) \tag{3.24}$$

Normalerweise werden Halbleiter (oder Bereiche im Halbleiter) so hoch dotiert, daß eine Ladungsträgerkonzentration dominiert: für n-dotiertes Material wird dann $p = 0$, für p-dotiertes wird $n = 0$ angenähert.

3.1.1.6 Der Hall-Effekt

Die Messung der Leitfähigkeit eines Halbleiters gibt Aufschluß über das Produkt aus Konzentration und Beweglichkeit des dominanten Ladungsträgers. Eine getrennte Bestimmung der beiden Größen wird ermöglicht durch den Hall-Effekt.

Hall-Effekt bei einem *p*-leitenden Halbleiter

Durchfließt ein Strom I (x-Richtung, s. Abb. 3.1) einen bandförmigen p-Halbleiter von rechteckigem Querschnitt $A = bd$, und wird das Band senkrecht zur Stromrichtung (z-Richtung) von einem Magnetfeld durchsetzt, so tritt entlang der y-Richtung (senkrecht zu I und zu B) die sogenannte elektrische Hall-Spannung U_H auf:

$$U_H = v_D \cdot B \cdot b \tag{3.25}$$

b ist die Breite des bandförmigen Halbleiters und v_D die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger (im vorliegenden Beispiel Löcher).
U_H entsteht aufgrund der Lorentzkraft von B auf die Ladung q: $\vec{F_L} = q \cdot (\vec{v}_D \times \vec{B})$, die für den Fall der Abbildung die positive Ladung in die negative y-Richtung verschiebt. Die verschobenen Ladungen bauen ein elektrisches Feld $\vec{E}_H$ auf, das der Verschiebung weiterer Ladungen entgegenwirkt. Gleichgewicht ist gegeben, wenn $\vec{F_L} + q\vec{E}_H = 0$, d.h. wenn $E_y = v_D \cdot B$. Dieses elektrische Feld erzeugt über der Breite b des Halbleiters die Hallspannung $U_H = E_H \cdot b = v_D\ B\ b$.
Für die Driftgeschwindigkeit folgt aus Gl. 3.3 zusammen mit der Beziehung für den Strom $I = A \cdot \sigma \cdot E$ der Ausdruck

$$v_D = \frac{I}{p\ q\ d\ b} \tag{3.26}$$

so daß sich für U_H ergibt:

$$U_H = \frac{I\ B\ b}{p\ q\ b\ d} = \frac{I\ B}{d} \cdot \frac{1}{p\ q} \tag{3.27}$$

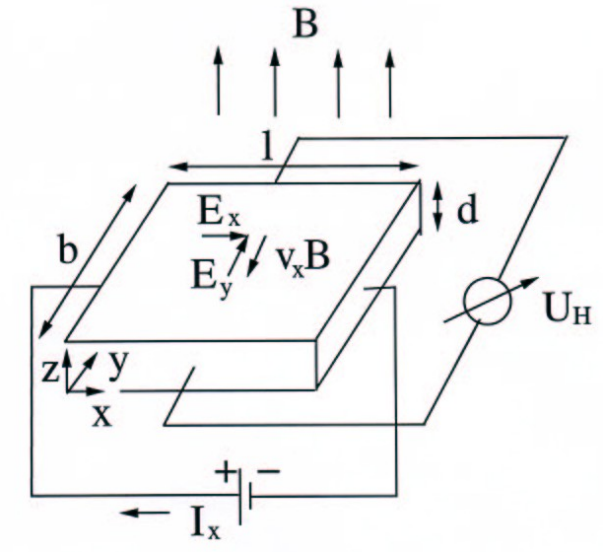


Abbildung 3.1: Der Hall-Effekt.

oder

$$U_H = I \cdot \frac{B}{d} \cdot R_H \tag{3.28}$$

Der so definierte (und meßbare) Hallwiderstand

$$R_H = \frac{1}{p\ q} \tag{3.29}$$

ist positiv für Löcherleitung (p-Halbleiter) und negativ für Elektronenleitung (n-Halbleiter). Ausgedrückt durch die Leitfähigkeiten σ_n, σ_p und die Beweglichkeiten μ_n, μ_p läßt sich auch schreiben

$$R_{H,p} = \frac{\mu_p}{\sigma_p} \tag{3.30}$$

bzw.

$$R_{H,n} = \frac{\mu_n}{\sigma_n} \tag{3.31}$$

Da die Lorentzkraft durch das Produkt von q und $\vec{v}_D$ bestimmt ist, hat sie für positive und negative Ladungsträger das gleiche Vorzeichen (das Vorzeichen von $\vec{v}_D$ wechselt bei Ladungswechsel ebenfalls), verschiebt also positive und negative Ladungen in die gleiche Richtung.

Hall-Effekt bei Halbleitern mit *p*- und *n*-Leitung

Aufgrund der verschiedenen Beweglichkeiten für n- und p-Ladungsträger wird der Ausdruck für den Hallwiderstand im Fall von n- und p-Leitung, also z.B. für undotierte Halbleiter mit $n = p = n_i$, komplizierter. R_H ergibt sich zu (s. Haensel/Neumann):

$$R_H = \frac{p\ \mu_p^2\ - n\ \mu_n^2}{(p\ \mu_p + n\ \mu_n)^2} \cdot \frac{1}{q} \tag{3.32}$$

bzw.

$$R_H = \frac{p\ \mu_p^2\ - n\ \mu_n^2}{\sigma^2} \cdot q \tag{3.33}$$

Hierbei sind p und n die Löcher- bzw. Elektronen-Konzentrationen.
Die Dotierungen der Halbleiter sind i.A. so hoch, daß für n-dotierte $p = 0$ und für p-dotierte $n = 0$ gesetzt werden kann. Dann gilt wieder: $R_H = -\frac{1}{qn} = -\frac{\mu_n}{\sigma}$ für Elektronen bzw. $R_H = \frac{1}{qp} = +\frac{\mu_p}{\sigma}$ für die Löcher. Für undotiertes Material gilt $n = p$ und damit $R_H = \frac{\mu_p - \mu_n}{\sigma}$.
Aus der Messung der Hallkonstanten bei p- oder n-dotierten Material (in diesem Versuch Germanium) lassen sich die Ladungsträgerdichten bestimmen.
Die Leitfähigkeit σ wird ermittelt aus der Strom-Spannungscharakteristik gemäß

$$U = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{d\ b} \cdot I \tag{3.34}$$

wobei l, d und b die Länge, Dicke und Breite der verwendeten Hallsonde bedeuten.
Aus der Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit (Gl. 3.22) läßt sich die Bandlücke ermitteln.

3.1.2 Versuchsaufbau und Durchführung

Benötigte Geräte:

U–Kern und Polschuhe aus Eisen;
2 Spulen mit je 250 Windungen, max. zulässiger Strom I=5 A;
Tangentiale Magnetfeld–Sonde mit 6–poligem Verbindungskabel, Meßbereich 0.01 mT–2 T, Meßgenauigkeit 3% (Skalenfehler) (bei 20°C) Punkt-zu-Punkt Fehler $\sim$ 0.2%;
B–Box,
Stativ;
Ge–Kristall undotiert auf Leiterplatten, max. Strom 4 mA, Dicke=1 mm, Länge=20 mm, Breite=10 mm;
Ge–Kristalle n–dotiert und p–dotiert auf Leiterplatten, max. Strom 33 mA, Dicke=1 mm, Länge=20 mm, Breite=10 mm;
Relative Fehler von Dicke, Länge, Breite jeweils 1%
Hall–Effekt–Grundgerät;
Netzgerät, U = 0 − 24 V, I = 0 − 6 A;
Sensor–CASSY;
Multimeter (Fehler s. beiliegende Betriebsanleitung)
relative Punkt-zu-Punkt Fehler bei Spannungs-, Strom- Messung 0.1%
Punkt-zu-Punkt Fehler bei Temperaturmessung: geschätzt $\sim 1°$

Achtung: die Halbleiter–Kristalle sind zerbrechlich. Bitte mit Vorsicht behandeln.

Lassen Sie alle Schaltungen vor dem Einschalten der Spannung vom Assistenten abnehmen.

Grundlegendes zu den Fehlern:

Bei den Messgrössen (Spannung, Strom, Temperatur, Magnetfeld etc.) ist grundsätzlich zu unterscheiden zwischen dem Skalenfehler, d.h. der Unsicherheit des Absolutwertes der Messgrösse im Vergleich zu einem Eichwert (z.B.der PTB in Braunschweig) und der Punkt-zu-Punkt Unsicherheit innerhalb einer Messreihe. Der Skalenfehler betrifft alle Werte einer Messreihe in gleicher

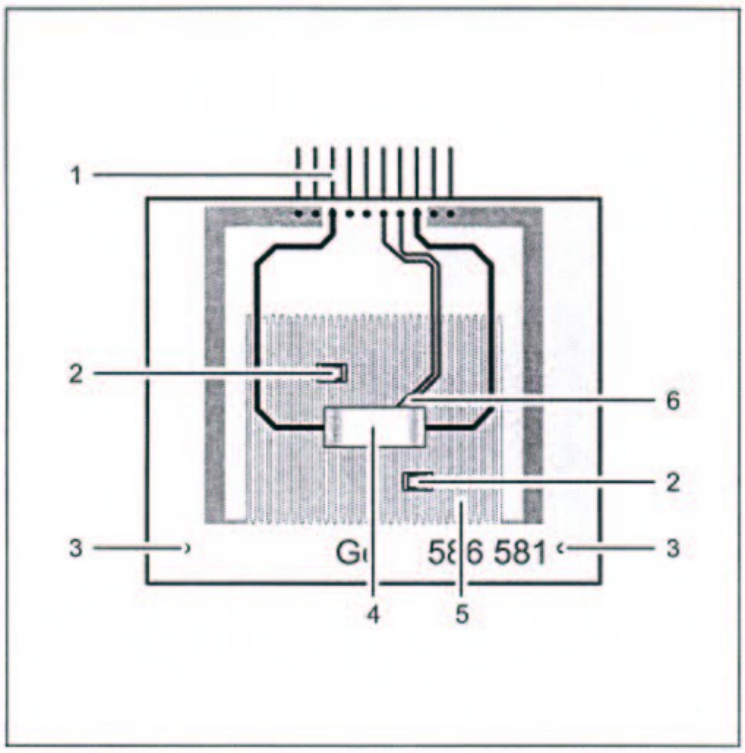


Abbildung 3.2: Leiterplatte mit Germanium–Kristall: 1=Stecker, 2=Abstandshalter, 3=Klemmstifte, 4=Ge–Kristall, 5=Heizmäander, 6=PT100–Temperaturfühler.

Weise, der Punkt-zu-Punkt Fehler nicht. Letzterer ist i.A. viel kleiner als der Skalenfehler.

Grundlegendes zum Versuch:

Die Germanium–Kristalle sind jeweils auf einer Leiterplatte (Platine) aufgelötet, welche in Abbildung 3.2 zu sehen ist. Über die Leiterplatte kann dem Kristall ein Strom zugeführt werden. Mittels der in die Platine integrierten Heizmäander kann der Kristall außerdem aufgeheizt werden, wobei die Temperatur über einen PT100–Temperatursensor gemessen wird. Die Leiterplatte wird in das Hall–Effekt–Grundgerät eingebaut wie in Abbildung 3.3 skizziert.
Das sogenannte ,,Hall–Effekt–Grundgerät" dient zur Messung des Hall–Effektes und der Leitfähigkeit (beides auch temperaturabhängig) an den auf Leiterplatten aufgelöteten Ge–Kristallen. Abbildung 3.4 zeigt die verschiedenen Elemente dieses Gerätes. Das Hall–Effekt–Grundgerät stellt eine einstellbare Stromquelle für den Querstrom I durch den Ge–Kristall zur Verfügung. Gemessen wird die Hall–Spannung U_H oder der Spannungsabfall am Kristall. Für den Hall–Effekt wird das Gerät zwischen den Polschuhen des Elektromagneten angeordnet. Zum Nullabgleich der Hall–Spannung kann eine elektronische Kompensation eingeschaltet werden. Zur Heizung der Kristalle werden die Heizmäander in der Leiterplatte über das Hall–Effekt–Grundgerät mit Strom versorgt.

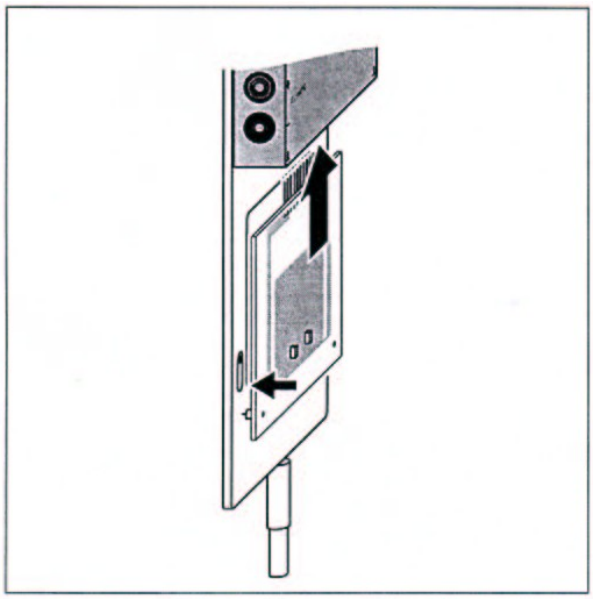
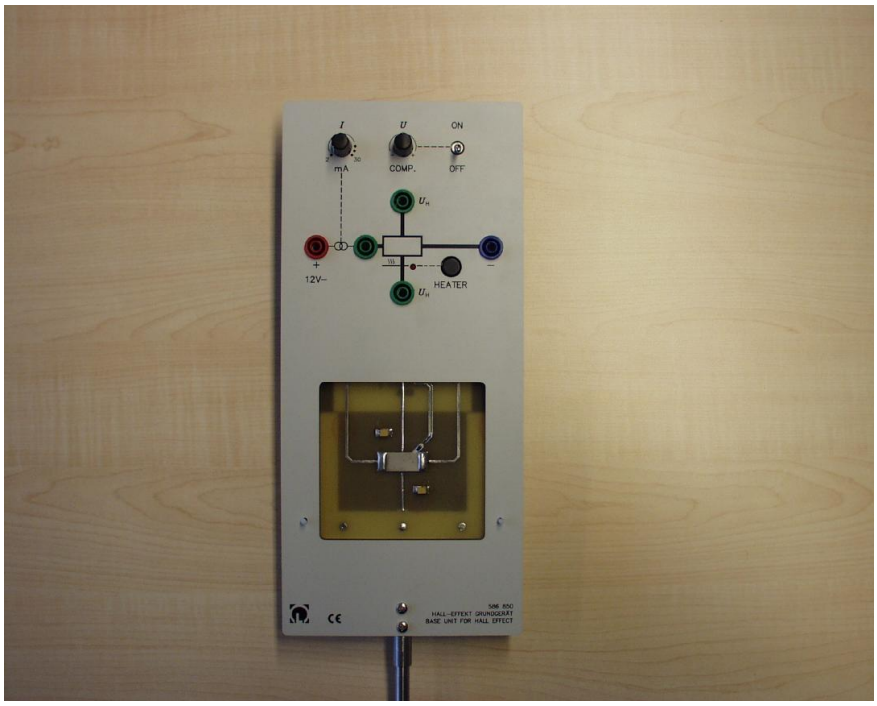


Abbildung 3.3: Einsetzen der Leiterplatte in das Hall–Effekt–Grundgerät.

3.1.2.1 Messung des Hall–Effektes bei n– oder p–dotiertem Germanium

Meßprinzip: ein dotierter Germaniumkristall wird von einem konstanten Strom durchflossen. Die Probe befindet sich in einem Magnetfeld. Es soll die Hall–Spannung bei Variation des Magnetfeldes gemessen werden. Von den beiden Paaren einer Vierergruppe sollte ein Paar das n–dotierte und das andere Paar das p–dotierte Germanium verwenden. Diese Aufteilung wird dann jeweils auch für Versuchsteil 3.1.2.2 beibehalten.
In der Spitze der tangentialen Magnetfeldsonde befindet sich eine Hall–Probe aus GaAs, welche das Magnetfeld senkrecht zur Sondenachse mittels des Hall–Effektes mißt. Das Magnetfeld wird über die B–Box mit dem Sensor–CASSY aufgenommen, wobei ein Meßbereich von 0–300 mT sinnvoll ist. Falls die Sonde außerhalb des Elektromagneten ein von Null verschiedenes Magnetfeld anzeigt, schalten Sie die Kompensation ein (im CASSY–Fenster ,,Einstellungen Sensoreingang" auf ,,LED an/aus" klicken, dann auf ,,→ 0 ←" klicken). Schließen Sie die Spulen an das Netzgerät an (Abbildung 3.5; E = Eingang, A = Ausgang, M = Mittelabgriff. Machen Sie sich klar, warum die Spulen wie auf Bild 3.5 miteinander verbunden werden müssen.) Befestigen Sie die Leiterplatte mit dotiertem Germanium im Hall–Effekt–Grundgerät und schrauben Sie das Hall–Effekt–Grundgerät im dafür vorgesehenen Loch im U–Kern fest (siehe Abbildung 3.6). Mit Hilfe des Stativs können Sie nun die B–Sonde ebenfalls zwischen die Polschuhe schieben und das Magnetfeld direkt an der Stelle der Ge–Probe messen. Schieben Sie die Polschuhe vorsichtig möglichst nahe an die Leiterplatte.
Die Beschaltung des Hall–Effekt–Grundgerätes ist in Abbildung 3.7 skizziert, wobei die Heizung (Spannung ,,3A max" und U_ϑ) in diesem Versuchsteil nicht verwendet wird.
Als Stromquelle wird die Stromquelle des Sensor–CASSYs verwendet. Vergewissern Sie sich vor dem Anschluß, daß der Strom ausgeschaltet ist, d.h. die Stromregelknöpfe am CASSY und am –Grundgerät ganz nach links gedreht sind. Stellen Sie dann mit Hilfe des Multimeters einen Strom von 30 mA ein.



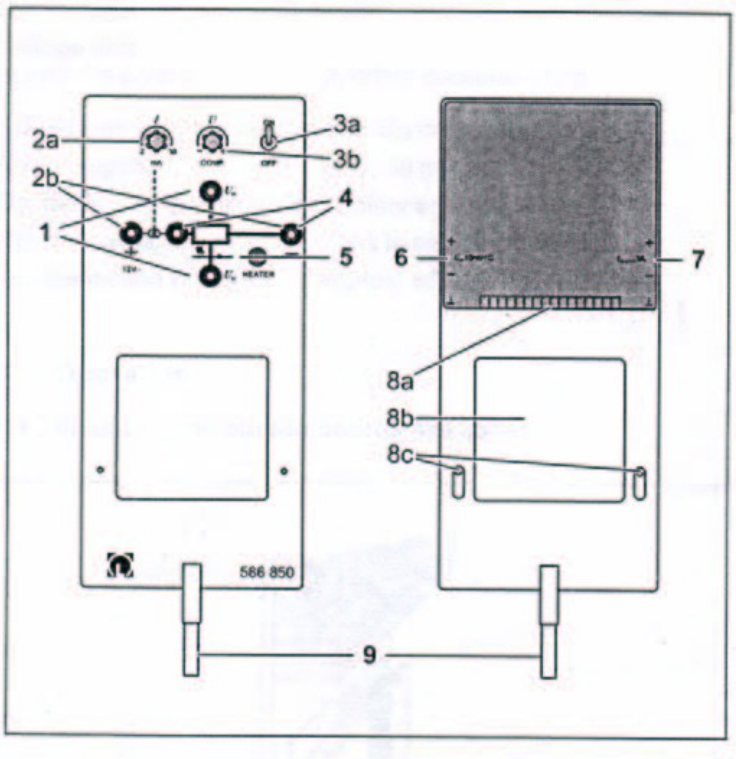


Abbildung 3.4: Aufbau des Hall–Effekt–Grundgerätes: 1=Abgriff für die Hall–Spannung, 2a=Regler für die Stromquelle, 2b=Eingang für Versorgungsspannung der Stromquelle, 3a=Schalter für die Kompensation, 3b=Kompensationsregler, 4=Abgriff für den Spannungsabfall am Ge–Kristall, 5=Tastschalter für die Heizung und LED-Kontrolleuchte, 6=Ausgang für die Temperaturmessung, 7=Stromeingang für die Heizung und den Temperaturfühler, 8a=Buchse, 8b=Fenster, 8c=Bohrungen, 9=Stativstange.

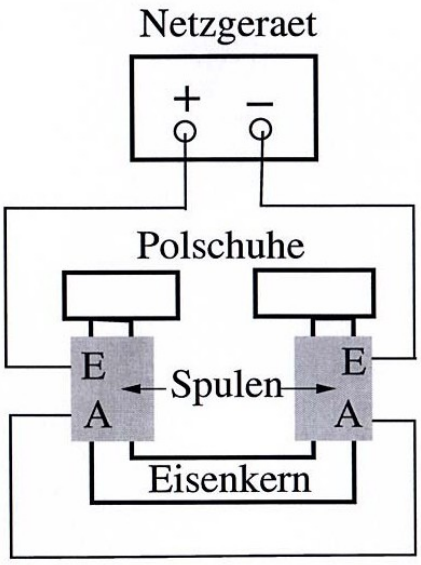


Abbildung 3.5: Schaltung der Spulen.

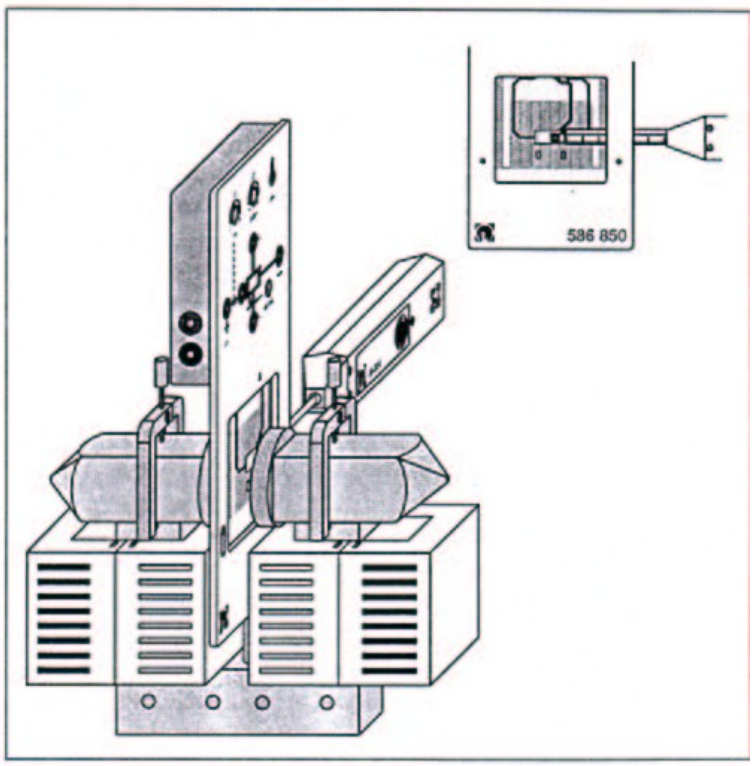


Abbildung 3.6: Versuchsaufbau zu Versuchsteil 3.1.2.1.

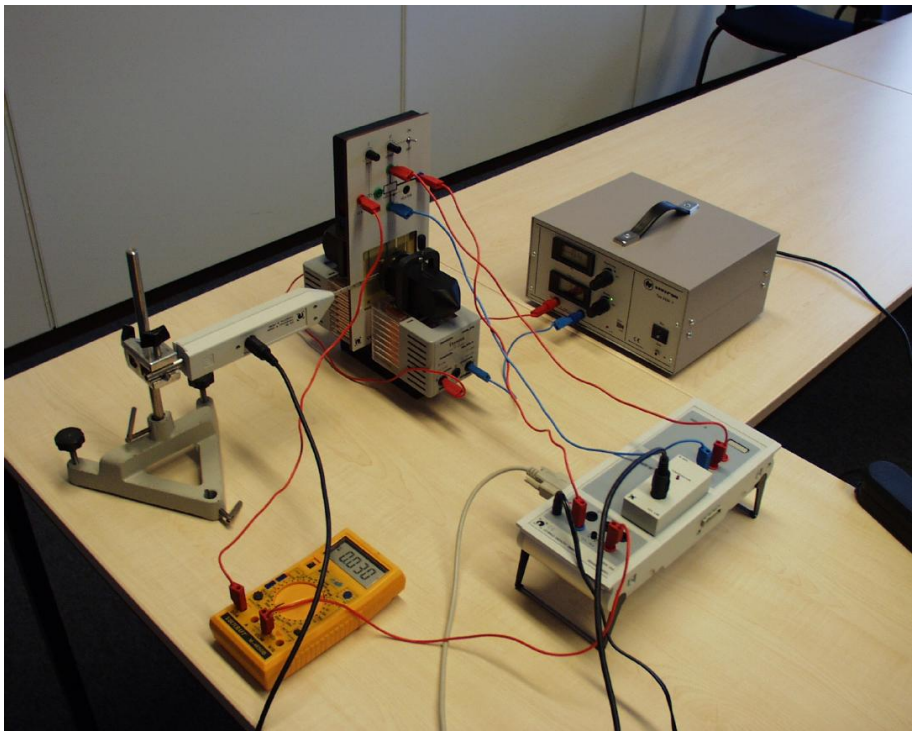
Nun soll das Magnetfeld variiert und die Hall–Spannung (Meßbereich 0–0.3 V) in Abhängigkeit vom Magnetfeld mit dem Sensor–CASSY gemessen werden. Zuerst wird bei ausgeschaltetem Magnetfeld die Hall–Spannung mit Hilfe des Kompensationsknopfes auf 0 V gestellt. Dann wird das Magnetfeld variiert, indem man den Spulenstrom von 0–5 A in Schritten von ca. 0.5 A erhöht. Die Hall–Spannung ist gegen das Magnetfeld aufzutragen und eine Anpassung durchzuführen. Zur Kontrolle Ihrer Messung sollten Sie gleich aus der Steigung die Hall–Konstante und aus der Hall–Konstanten die Ladungsträgerdichte berechnen.

3.1.2.2 Leitfähigkeit von dotiertem Germanium

Meßprinzip: in diesem Versuchsteil soll die Leitfähigkeit des dotierten Ge–Kristalls gemessen werden, indem ein variabler Strom durch den Kristall geschickt und die am Kristall anliegende Spannung gemessen wird.
Die Schaltung am Hall–Effekt–Grundgerät ist in Abbildung 3.8 gezeigt, wobei die Heizung (Spannung ,,3A max" und U_ϑ) erst in Teil 3.1.2.3 verwendet wird.
Schalten Sie das Magnetfeld aus. Belegen Sie die Eingänge des CASSY nun mit dem durch den Kristall fließenden Strom und der am Kristall anliegenden Spannung (Meßbereich 0–3 V). Erhöhen Sie den Strom in kleinen Schritten bis I=30 mA und messen Sie die Spannung. Führen Sie eine Anpassung an die erhaltene Kurve durch und berechnen Sie zur Kontrolle Ihrer Messung sofort die Leitfähigkeit.

3.1.2.3 Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit von undotiertem Germanium

Meßprinzip: Ein konstanter Strom wird durch einen undotierten Ge–Kristall geschickt. Der Kristall wird durch die in die Leiterplatte eingelassene Heizschleife geheizt und die am Kristall abfallende Spannung gemessen.
Die Schaltung am Hall–Effekt–Grundgerät ist in Abbildung 3.8 gezeigt.
Tauschen Sie die Platte mit dotiertem Germanium gegen die Platte mit undotiertem Germanium aus. Die Schaltung ist wie in Versuchsteil 3.1.2.2 mit dem Unterschied, daß der Strom nicht mit dem CASSY, sondern mit dem Multimeter gemessen wird. Stellen Sie einen Strom von 4 mA ein. Schließen Sie die Heizschleife in der Leiterplatte an das Netzgerät an und legen Sie den Temperatursensor auf den freien CASSY–Eingang. Definieren Sie sich neue Variablen: Temperatur in K und in °C. Der Zusammenhang zwischen Spannung am Temperatursensor und der Temperatur in °C ist: $T\,[°C]=U\,[V]\cdot 100\,°C/V$.
Die Probe soll bis ca. 150°C geheizt und die Messung beim Abkühlen vorgenommen werden (warum?). Zum Heizen drehen Sie die Spannung am Netzgerät hoch (U=8–9 V ergibt eine sinnvolle Heizgeschwindigkeit) und drücken Sie auf den ,,Heater"–Knopf. Wenn die LED leuchtet, wird geheizt. Die Heizung kann nur abgeschaltet werden, indem die Spannung heruntergedreht wird (die LED sollte ausgehen). Aber Achtung: bei Spannungen unter ca. 4.5 V funktioniert die Temperaturmessung nicht!
CASSY–Einstellung zur Messung bei abfallender Temperatur: es soll automatisch nach jeweils einer Abkühlung um einige Grad gemessen werden. Klicken Sie dafür im CASSY–Fenster ,,Meßparameter" auf ,,automatische Aufnahme" und geben Sie eine geeignete Meßbedingung für die Temperaturdifferenz $\delta T=T_{neu}-T_{alt}$ ein. CASSY hat dabei ein Initialisierungsproblem, welches man umgeht, indem man sofort nach dem Start der Messung die Meßbedingung kurz ausschaltet



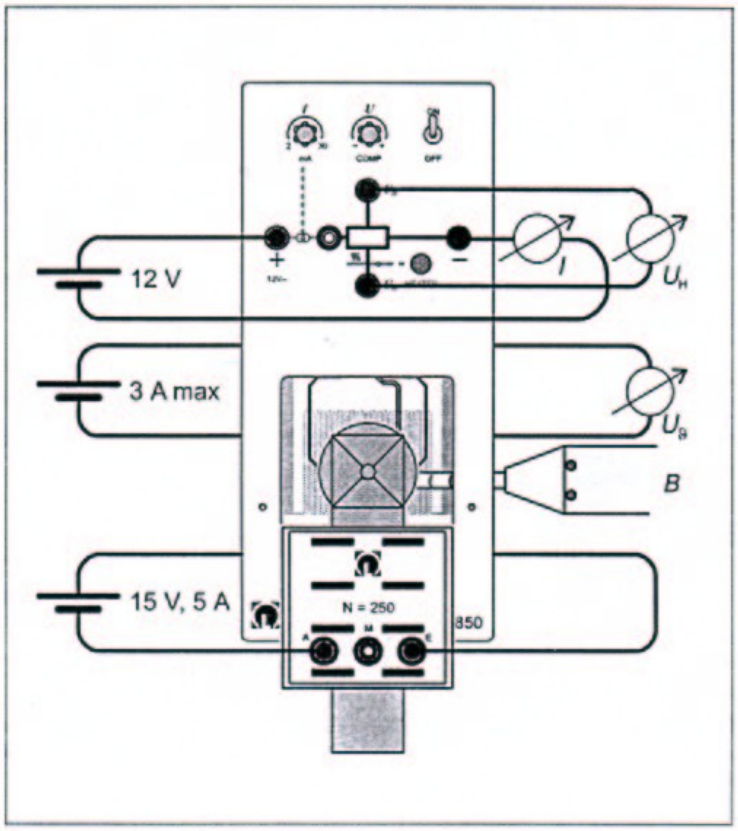
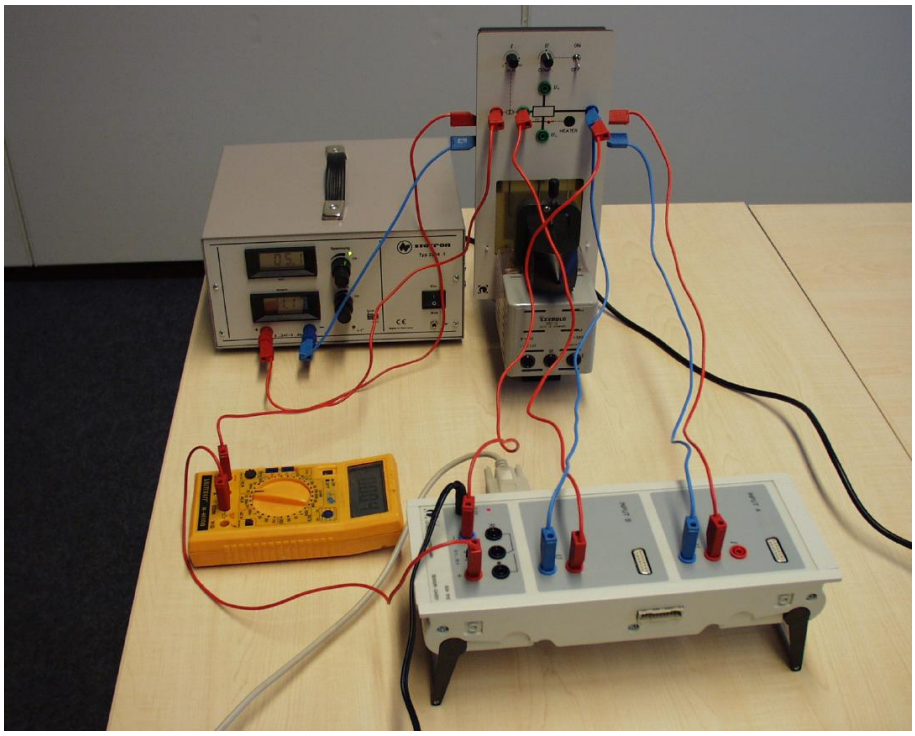


Abbildung 3.7: Versuchsaufbau zu Versuchsteil 3.1.2.1.



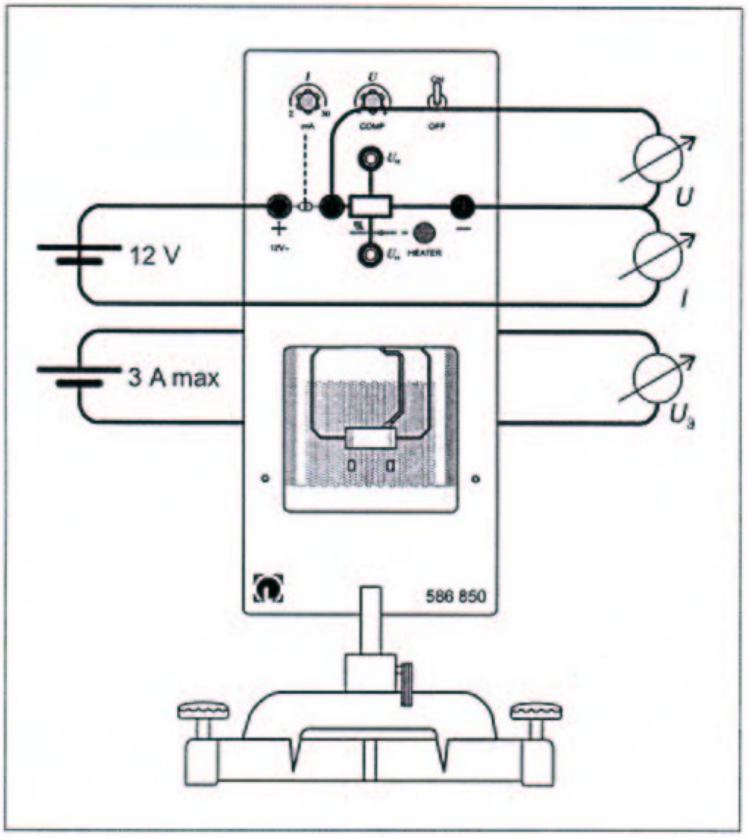


Abbildung 3.8: Versuchsaufbau zur Messung der Leitfähigkeit. Die Heizung wird erst in Versuchsteil 3.1.2.3 verwendet.

und somit automatisch einige Werte (einer genügt) aufnimmt, dann die Meßbedingung wieder anklickt.
Wählen Sie eine Auftragungsweise, in der sich ein linearer Zusammenhang der aufgetragenen Größen ergibt, und überprüfen Sie dadurch Ihre Messung.

3.1.3 Auswertung

Bitte diskutieren Sie die Fehlerquellen und geben Sie alle Resultate mit Fehler an.
zu 3.1.2.1: Messung des Hall–Effektes bei n– oder p–dotiertem Germanium
Tragen Sie die Hall–Spannung gegen das Magnetfeld auf und passen Sie eine Gerade an. Geben Sie (auch bei allen folgenden Anpassungen) Achsenabschnitt und Steigung mit Fehlern an und kommentieren Sie das Resultat. Aus der Steigung bestimmen sie die Hall–Konstante und aus der Hall–Konstanten die Ladungsträgerdichte.
zu 3.1.2.2: Leitfähigkeit von dotiertem Germanium
Tragen Sie Spannung gegen Strom auf. Führen Sie eine Geradenanpassung durch und berechnen Sie aus der Steigung die Leitfähigkeit und die spezifische Leitfähigkeit. Bestimmen Sie die Beweglichkeit aus der Leitfähigkeit unter Berücksichtigung des Resultates aus 1.). Stimmt Ihr Ergebnis innerhalb der Genauigkeit mit dem Literaturwert überein? Vergleichen Sie auch die Beweglichkeiten der n– und p–dotierten Halbleiter miteinander, unterscheiden sich die Beweglichkeiten signifikant?
zu 3.1.2.3: Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit von undotiertem Germanium
Tragen Sie $\ln(\sigma)$ gegen $1/(2kT)$ auf. Passen Sie eine Gerade an und berechnen Sie die Energielücke aus der Steigung. Berechnen Sie aus Ihren beiden Werten das gewichtete Mittel und vergleichen Sie mit dem Theoriewert.
Diskutieren Sie die Resultate in Ihrer Zusammenfassung.

3.2 Leitungseigenschaften von Halbleitern und Kennlinien von Halbleiterbauelementen

Aufgaben:

- Untersuchung der Temperaturabhängigkeit des Widerstandes von Halbleiter– und Edelmetallwiderstand, Bestimmung der Bandlücke im Halbleiter.
- Kennlinien von Halbleiterbauelementen: Diode und Transistor.

Grundlagen:

Bändermodell, undotierte und dotierte Halbleiter, Leitungsmechanismen, pn–Übergang, Diode, Transistor.

Literatur:

- Hänsel/Neumann, Physik, Moleküle und Festkörper
- Bergmann/Schäfer, Experimentalphysik 6, Festkörper
- Bergmann/Schäfer, Experimentalphysik 2, Elektromagnetismus
- R. Müller, Halbleiter-Elektronik 2, Bauelemente der Halbleiter–Elektronik
- Gerthsen/Vogel, Physik
- Datenblätter zum Transistor gibt es im Internet, z.B. http://www.fairchildsemi.com/pf/BD/BD137.

3.2.1 Theoretische Grundlagen

3.2.1.1 p-und n-Halbleiter

Die Grundlagen der elektrischen Leitungsphänomene (insbesondere die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeiten) in Leitern und Halbleitern wurden im ersten Teil dieser Anleitung ausführlich behandelt. Außerdem sei erinnert an die dotierten oder Störstellen-Halbleiter: negative oder n-Halbleiter sind so dotiert, daß sie (dicht) unterhalb der Leitungsbandkante ein Niveau aufweisen, aus dem leicht ein Elektron abgegeben wird in das Leitungsband: der Halbleiter ist mit einem Donator dotiert und seine Leitfähigkeit für Elektronen ist erhöht. Die Ladungsträgerdichte wird mit N_D bezeichnet. Positive oder p-Halbleiter weisen durch die Dotierung ein Niveau (dicht) oberhalb der Valenzbandkante auf, in die leicht Elektronen aus dem Valenzband übergehen können und dort Defektelektronen erzeugen, die die Leitfähigkeit für positive Ladungsträger erhöhen: der Halbleiter ist mit einem Akzeptor dotiert; die Ladungsträgerdichte wird mit N_A bezeichnet.

3.2.1.2 Grenzflächen

Für das Verständnis von Halbleiterbauelementen sind die Vorgänge an den Grenzflächen zwischen p- und n-leitendem Halbleitermaterial wie auch zwischen Halbleitern und Metallen wesentlich.
In einer p-n-Grenzschicht kommt es wegen der unterschiedlichen Konzentrationen N_A und N_D zu einer Diffusion. Das Konzentrationsgefälle treibt Löcher aus dem p-Gebiet in das n-Gebiet und Elektronen aus dem n-Gebiet in das p-Gebiet. Als Folge bildet sich eine Raumladung, die ein elektrisches Feld erzeugt, das der weiteren Diffusion entgegenwirkt. Es ergibt sich ein dynamisches Gleichgewicht, in dem sich Diffusions- und Feldstrom kompensieren. Über der endlichen Breite w der Raumladungsschicht entsteht eine Potentialdifferenz (Diffusionsspannung) U_D, die von den Ladungsträgerdichten abhängt:

$$U_D = \frac{k_B T}{q_e} \cdot ln(\frac{N_A N_D}{n_i^2}) \tag{3.35}$$

n_i ist die Inversionsdichte des Halbleitermaterials.
Für die Breite der Raumladungszone gilt:

$$w \sim \sqrt{U_D \cdot (\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D})} \tag{3.36}$$

w nimmt mit wachsender Konzentration ab.
Eine von außen angelegte Sannung U verkleinert oder vergößert je nach ihrer Polarität die Potentialbarriere U_D des p-n-Übergangs. Bei einer Vergrößerung der Potentialbarriere durch U ist der Übergang in Sperrrichtung geschaltet, bei Verkleinerung in Durchlaßrichtung. Der Übergang zeigt also einen Gleichrichtereffekt, er stellt eine Diode dar. Der Strom als Funktion der angelegten Spannung U hat die folgende Gestalt:

$$I = I_\circ \cdot (e^{\frac{qU}{k_B T}} - 1) \tag{3.37}$$

$U > 0$ entspricht der Durchlaßrichtung: der Strom wächst exponentiell mit der angelegten Spannung; ohne einen Strombegrenzer (Ohm'scher Widerstand) wird die Diode thermisch zerstört. $U < 0$ entspricht dem Sperrfall, für hohe Sperrspannungen wird I unabhängig von U:

$$I(U \to \infty) \to -I_\circ \tag{3.38}$$

$I_\circ$ heißt Sättigungssperrstrom. Eine typische Diodenkennlinie (d.h. Abhängigkeit des Stromes von der angelegten Spannung) ist in Abb.3.9 gezeigt. Eine Diode wird u.a. charakterisiert durch die Spannung, bei der sie leitend wird. Diese Spannung wird als Schwellenspannung U_S bezeichnet. Sie kann grob aus der Asymptoten an den ansteigenden Ast der Kennlinie bestimmt werden. Die Diode sperrt bis zur Durchbruchsspannung U_{Br}, bei der die elektrische Feldstärke im Raumladungsbereich einen kritischen Wert erreicht. Es kommt zu einer Lawinenbildung und der Sperrstrom steigt exponentiell an.

Beim Metall-Halbleiter-Übergang bilden sich ebenfalls Raumladungen (im Halbleiter) bzw. Oberflächenladungen (im Leiter) aus, wobei die Dotierung des Halbleiters für das elektrische Verhalten des Kontaktes entscheidend ist: gemäß Gl. 3.36 gilt für die Breite der Raumladungsschicht im Halbleiter $w \sim \sqrt{\frac{1}{N_A}}$ oder $w \sim \sqrt{\frac{1}{N_D}}$. Für ausreichend große Werte von N_D oder N_A wird w

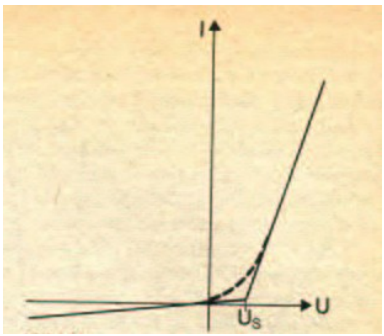


Abbildung 3.9: Typische Kennlinie einer Diode.

so klein, daß Elektronen die Schicht sehr leicht 'durchtunneln' können (als Tunneln bezeichnet man das Überwinden einer Potentialbarriere infolge des quantenmechanischen Tunneleffektes). Unabhängig von der Polarität der angelegten Spannung fließt ein Strom. In diesem Fall stellt der Metall-Halbleiter-Übergang einen sogenannten Ohm'schen Kontakt dar. Bei geringerer Dotierung des Halbleiters wird die Breite der Raumladungszone größer, der Tunneleffekt wird klein und der Kontakt zeigt Gleichrichterverhalten. In diesem Fall stellt der Metall-Halbleiter-Übergang einen sogenannten Schottky-Kontakt dar (Schottky-Diode).

3.2.1.3 Transistor

Fügt man einem pn-Übergang einen weiteren Halbleiter-Halbleiter-Übergang hinzu, so erhält man das wichtigste Bauelement der Elektronik: den Transistor (pnp oder npn). Im Transistor kann ein kleines Eingangssignal effizient in ein wesentlich größeres Ausgangssignal umgewandelt werden. Der Transistor wird also (unter anderem) als Verstärker verwendet.
Die beiden gleichnamig dotierten Bereiche des Transistors werden Emitter (E) und Kollektor (C), der dritte Basis (B) genannt. Abb. 3.10 zeigt einen pnp-Transistor in sogenannter Basis-Schaltung, d.h. die Spannungen U_{CB} und U_{EB} sind auf die Basis bezogen. Solange der Emitterstrom $I_E = 0$ ist, fließt bei der angegebenen Polarität nur ein geringer Kollektor-Sperrstrom. Wenn $I_E \neq 0$ ist, werden der Basis positive Ladungsträger zugeführt und der Übergang Basis-Kollektor wird durch Diffusion leitend, so daß ein Kollektorstrom fließen kann. Dieser Kollektorstrom ist nahezu unabhängig von der Kollektorspannung und wird nur vom Emitterstrom beeinflußt. I_E ist etwas größer als I_C,da ein kleiner Basisstrom I_B von der Basis in den Emitter fließt. Es wird also

$$I_C = I_E - I_B \tag{3.39}$$

Als Kennlinien des Transistors bezeichnet man bei der Basisschaltung den Verlauf von I_C als Funktion der Spannung zwischen Basis und Kollektor, U_{CB}, für verschiedene I_E, bzw. die Abhängigkeit des Kollektorstromes I_C vom Emitterstrom I_E. Die Stromverstärkung wird definiert als

$$\alpha = \frac{I_C}{I_E} \tag{3.40}$$

für $U_{CB} = \text{const.}$ (bzw. bei Nichtlinearität abschnittsweise als $\Delta I_C/\Delta I_E$, wobei z.B. ΔI_C die Änderung von I_C zwischen zwei Punkten auf der Kennlinie ist). In der Basisschaltung ist $\alpha \leq 1$. Abb. 3.11 zeigt einen npn-Transistor in der sogenannten Emitterschaltung, d.h. die Spannungen

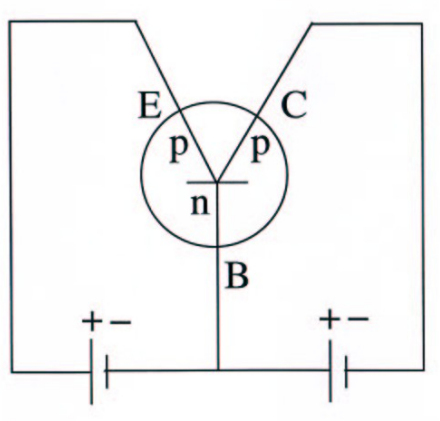


Abbildung 3.10: pnp-Transistor in Basisschaltung.

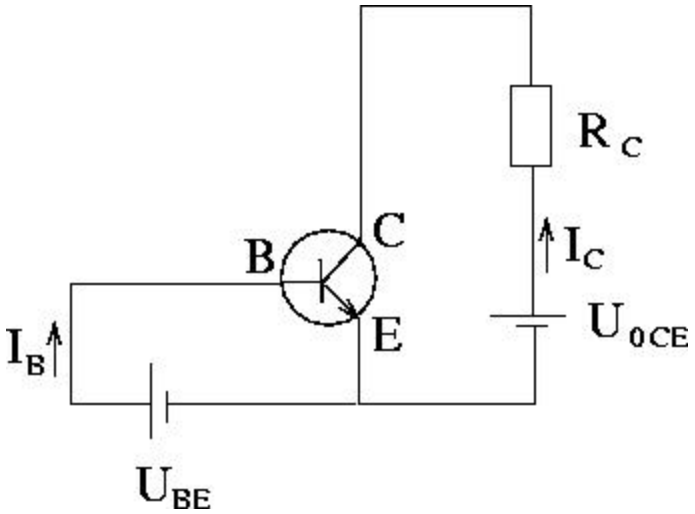


Abbildung 3.11: npn-Transistor in Emitterschaltung

U_{BE} und U_{CE} sind auf den Emitter bezogen. Diese Konfiguration soll im Praktikum untersucht werden. Die Emitterschaltung wird am häufigsten angewendet, denn diese Schaltung führt zu einer Stromverstärkung als auch einer Spannungsverstärkung. Die Stromverstärkung wird definiert als

$$\beta = \frac{I_C}{I_B} \tag{3.41}$$

für $U_{CE} = \text{const.}$
Drei Kennlinien sind für die Emitterschaltung charakteristisch (siehe Abb. 3.12):

a.) Stromsteuerkennlinie (Stromverstärkung): Kollektorstrom I_C als Funktion des Basisstroms I_B (für $U_{CE} = \text{const.}$)

b.) Eingangskennlinie: Basisstrom I_B als Funktion der Basis-Emitter-Spannung U_{BE} (für $U_{CE} = \text{const.}$)

c.) Ausgangskennlinie: Kollektorstrom I_C als Funktion der Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} mit dem Basisstrom I_B (oder U_{BE}) als Parameter.

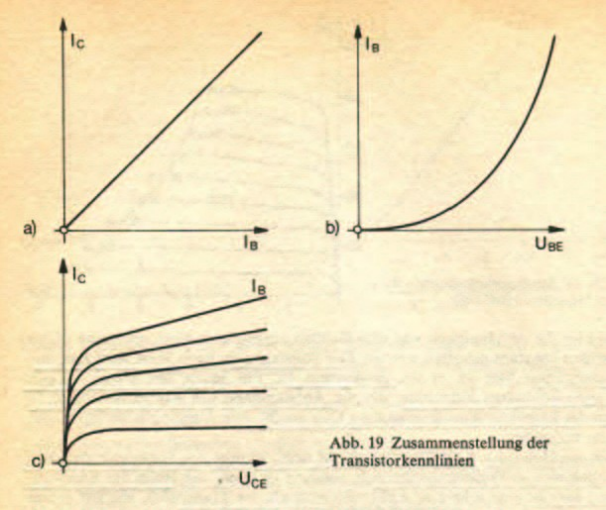


Abbildung 3.12: Kennlinien eines Transistors in Emitterschaltung: a.) Stromsteuerkennlinie, b.) Eingangskennlinie, c.) Ausgangskennlinien für verschiedene I_B.

Die drei Kennlinien werden traditionell in ein gemeinsames Diagramm eingetragen (Kennlinienfeld), wobei die verschiedenen Größen in folgende Richtungen aufgetragen werden: U_{CE} in $+x$-Richtung, I_C in $+y$-Richtung, U_{BE} in $-x$-Richtung, und I_B in $-y$-Richtung. In Abb. 3.14 ist ein solches Kennlinienfeld dargestellt. Man sieht, daß mit Hilfe dieser Darstellung für eine bestimmte Eingangsspannung U_{BE} sehr einfach der dazugehörende Basis- und Kollektorstrom sowie die resultierende Ausgangsspannung abgelesen werden können. Wie man dem Kennlinienfeld leicht entnehmen kann, führt die Emitterschaltung zu einer Strom- ($I_C > I_B$) als auch einer Spannungsverstärkung ($U_{CE} > U_{BE}$).
Damit ein Verbraucher eine Spannung im Ausgangsstromkreis des Transistors abgreifen kann, muß sich in diesem Kreis ein Widerstand R_C befinden, welcher demnach in Reihe mit dem Widerstand des Transistors geschaltet ist (siehe Ersatzschaltbild Abb. 3.13). Es gilt dann

$$U_0 = U_C + U_{CE}\,, \tag{3.42}$$

wobei U_0 die Batteriespannung ist (wurde in Abb. 3.11 der Klarheit halber als U_{0CE} bezeichnet) und U_C die am Widerstand abfallende Spannung. Die Kennlinie des Widerstandes wird in das Ausgangskennlinienbild eingezeichnet (Abb. 3.14). Hierzu betrachtet man zwei Fälle:
a.) Der Transistor sei komplett gesperrt: $I_C = 0 \Rightarrow U_C = 0 \Rightarrow U_{CE} = U_0$. Dies ergibt den ersten Punkt der Kennlinie. In der Zeichnung wurde $U_0 = 9\text{V}$ gewählt.
b.) Der Transistor sei komplett durchgesteuert und hat einen verschwindend kleinen Widerstand: $U_{CE} = 0 \Rightarrow U_C = U_0 \Rightarrow I_C = U_0/R_C$. In der Zeichnung wurde $R_C = 300\,\Omega$ gewählt $\Rightarrow$ $I_C = 30\,\text{mA}$. Dies ergibt den zweiten Punkt der Kennlinie.
Die Interpretation der Widerstands-Kennlinie ist dann folgende: für einen Kollektorstrom von z.B. 15 mA beträgt $U_{CE} = 4.5\,\text{V}$ und somit die abgegriffene Spannung $U_C = U_0 - U_{CE} = 4.5\,\text{V}$.

Der Punkt, bei dem der Ruhestrom am Widerstand gerade die Hälfte des maximalen Kollektorstroms beträgt (also $I_C = 15\,\mathrm{mA}$ im betrachteten Beispiel), wird als Arbeitspunkt bezeichnet. Von diesem Punkt aus kann I_C nach beiden Seiten gleich weit schwanken, falls ein Signal ankommt.
In der Emitterschaltung wird also ein kleiner Eingangsstrom (über weite Bereiche) linear in einen größeren Ausgangsstrom sowie ein Spannung $U_C = R_C I_C$ umgesetzt, wobei wegen des kleinen Eingangsstroms (Basisstrom im Gegensatz zur Basisschaltung) die steuernde Signalquelle im Eingangsstromkreis nur schwach belastet wird. Die Spannungsverstärkung ist dagegen stark nichtlinear.

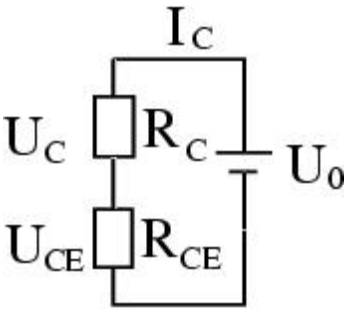


Abbildung 3.13: Ersatzschaltbild des Ausgangsstromkreises eines Transistors in Emitterschaltung mit Lastwiderstand.

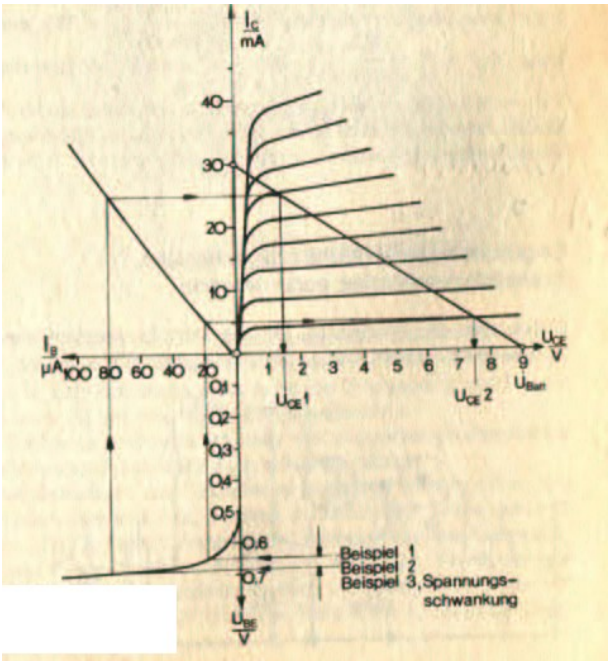


Abbildung 3.14: Typisches Kennlinienfeld für einen Transistors in Emitterschaltung.

3.2.2 Versuchsaufbau und Durchführung

Benötigte Geräte:

Halbleiterwiderstand, zulässiger Temperaturbereich $-100\,°C < T < 200\,°C$; Widerstandsbereich ca. $20\,k\Omega$ bis $5\,\Omega$;
Edelmetallwiderstand, zulässiger Temperaturbereich $-100\,°C < T < 400\,°C$, Widerstandsbereich ca. $60\,\Omega$ bis $240\,\Omega$;
Temperatursensor, Thermoelement NiCr–Ni, $-200\,°C < T < +1200\,°C$, Fehler $1.5\,°C$ für $-40\,°C < T < +375\,°C$;
Temperaturbox, Meßfehler $< 1\,\%$;
Dewar–Gefäß;
Elektrischer Rohrofen, $220\,V$, Endtemperatur $T_{max} = 600\,°C$;
Stromquellenbox, Fehler $< 1\%$;
Sensor–CASSY;
Power–CASSY;
Raster-Steckplatte;
Si–Diode 1 N 4007;
Ge–Diode AA 118;
Leuchtdiode;
Zenerdiode ZY 3.9;
npn–Transistor BD 137;
Diverse Widerstände.

Der Edelmetallwiderstand besteht aus einem dünnen Platindraht, der in ein Glasröhrchen eingelassen ist. Vorsicht beim Hantieren des Widerstandes, das Röhrchen ist äußerst zerbrechlich.

Lassen Sie alle Schaltungen vor dem Einschalten der Spannung vom Assistenten abnehmen.

Die unten angegebenen Zeitdauern pro Messung sollen nur ein Anhaltspunkt für Sie sein. Falls Sie allerdings wesentlich länger brauchen, könnten Sie am Ende in Zeitdruck geraten.

3.2.2.1 Temperaturabhängigkeit des Widerstandes von Halbleiter– und Platinwiderstand

Dauer der Messung: ca. 45 Minuten pro Widerstand.
Meßprinzip: der Widerstand eines Halbleiterwiderstandes soll zwischen Zimmertemperatur und $+200\,°C$ gemessen und das Verhalten mit dem eines Platinwiderstandes verglichen werden. Zur Messung des Widerstandes dient die Stromquellenbox, welche auf das Sensor–CASSY aufgesteckt wird. In der Stromquellenbox wird ein Strom erzeugt, welcher durch den Widerstand fließt und für einen Spannungsabfall am Widerstand sorgt. Der Spannungsabfall wird gemessen und daraus intern der Widerstand bestimmt. Wählen Sie den Meßbereich für den Widerstand bei jeder Messung so, daß Sie ihn während der Messung nicht ändern müssen! Für die Temperaturmessung

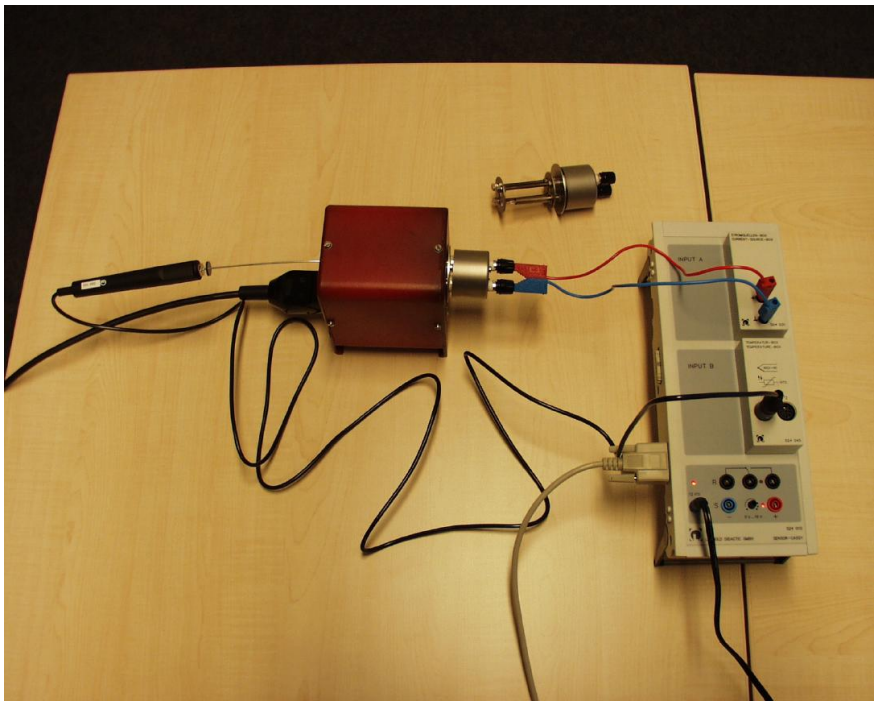


Abbildung 3.15: Versuchsaufbau zur Messung der Temperaturabhängigkeit von Widerständen. Ein Widerstand wird gerade im Ofen geheizt, der andere ist im Hintergrund zu sehen.

verwenden Sie die Temperaturbox. Abbildung 3.15 zeigt den Versuchsaufbau.
Heizen Sie den Halbleiterwiderstand im Ofen auf +200 °C auf und messen Sie den Widerstand während des Erwärmens. Achten Sie auf möglichst guten Kontakt des Temperatursensors mit dem Widerstand (Erschütterungen vermeiden!). Der Ofen heizt sehr stark nach. Schalten Sie ihn bei ca. +160 °C aus (das hat den Vorteil, daß nicht so schnell geheizt wird → besserer Wärmeaustausch). Es bietet sich an, automatisch nach jeweils einer Erwärmung um einige Grad zu messen. Klicken Sie dafür im CASSY–Fenster ,,Meßparameter" auf ,,automatische Aufnahme" und geben Sie eine geeignete Meßbedingung für die Temperaturdifferenz $\delta T = T_{neu} - T_{alt}$ ein (am besten vor der eigentlichen Messung ausprobieren, ob die Meßbedingung funktioniert). Als Meßbereich für den Widerstand stellen Sie am besten 0-100 Ω ein. Wählen Sie zur ,,online"-Kontrolle Ihrer Messung eine sinnvolle Auftragungsweise!
Wiederholen Sie die Heizmessung mit dem Platinwiderstand. Da der Ofen hierfür abkühlen muß, nehmen Sie in der Zwischenzeit die Dioden- und Transistorkennlinien auf.

3.2.2.2 Kennlinien von Dioden

Dauer der Messung: ca. 30 Minuten.
Es sollen die Kennlinien von vier Dioden aufgenommen werden. Dafür werden Power– und Sensor–CASSY zusammengeschaltet (das Power–CASSY links). Realisieren Sie die in Abbildung 3.16 gezeigte Schaltung mit einem Schutzwiderstand von 100 Ω. Als Spannungsmesser dient das Sensor–CASSY (Meßbereich −10 bis 10 V). Das Power–CASSY fungiert als Funktionsgenerator und wird als Spannungsquelle mit gleichzeitiger Strommessung betrieben. Wählen Sie den ,,single shot" Modus, stellen Sie den Strommeßbereich auf die maximale Empfindlichkeit und

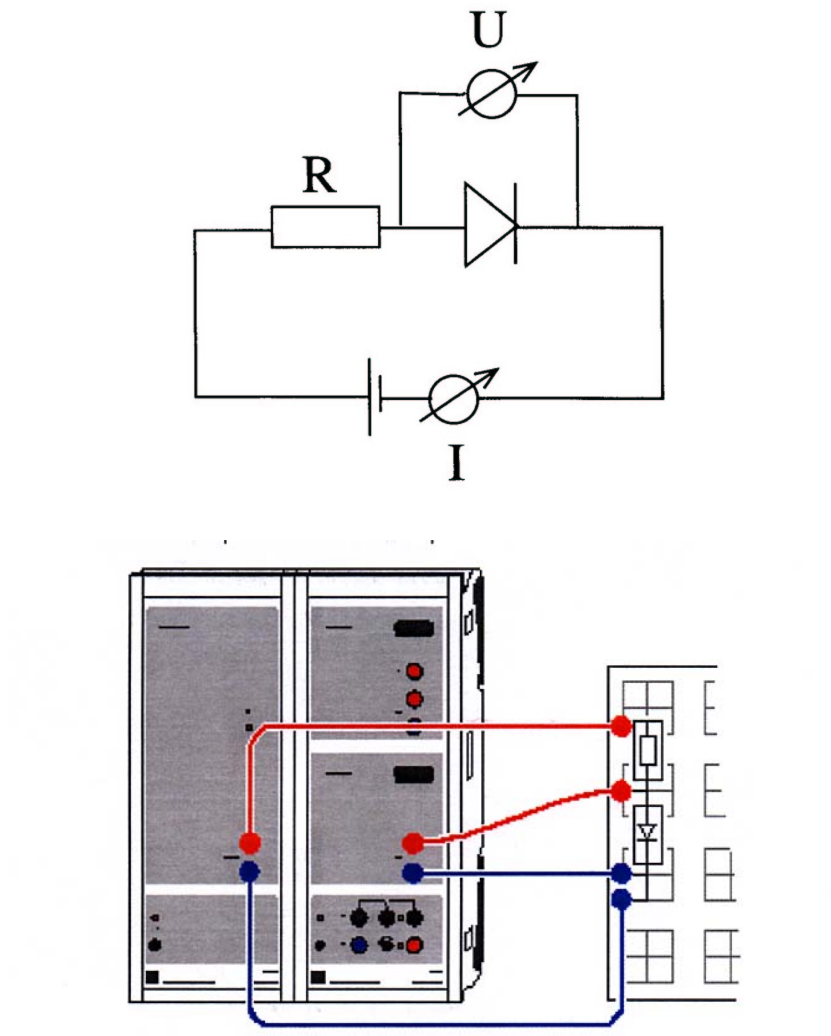


Abbildung 3.16: Schematisches Schaltbild und Schaltung am CASSY für die Aufnahme von Diodenkennlinien.

den Stellbereich auf die größte Amplitude. Überlegen Sie sich eine sinnvolle Kurvenform für die Spannung (siehe Power–CASSY–Anleitung, symmetrisch bedeutet Variation der Spannung zwischen –A und A, asymmetrisch zwischen 0 und A, wobei A=Amplitude), und machen Sie sich die konkrete Bedeutung der Parameter (Frequenz f in Hz, Amplitude A in V („Vp"), Gleichspannungsoffset O in V („V="), Tastverhältnis = Verhältnis von ansteigenden und abfallenden Kurventeilen in %) klar. Wählen Sie sinnvolle Werte. Im Fenster „Meßparameter" stellen Sie „automatische Aufnahme" und eine sinnvolle Meßzeit und Meßintervall ein. Die Spannung wird dann automatisch durchgefahren. Zeichnen Sie alle Kennlinien in ein Diagramm.

3.2.2.3 Kennlinien eines npn-Transistors in Emitterschaltung

Dauer der Messung: ca. 1 Stunde.
Abbildung 3.17 zeigt die Schaltung mit allen Meßgrößen. Machen sie sich den Aufbau klar, insbe-

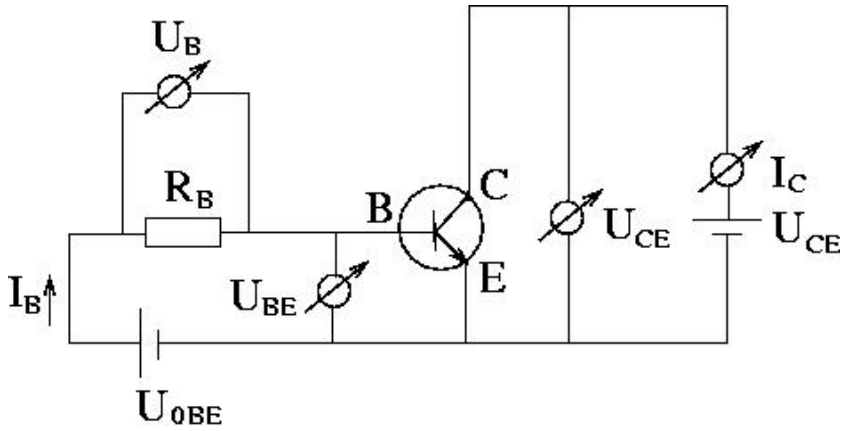


Abbildung 3.17: npn-Transistor in Emitterschaltung. Alle Meßgrößen sind eingezeichnet.

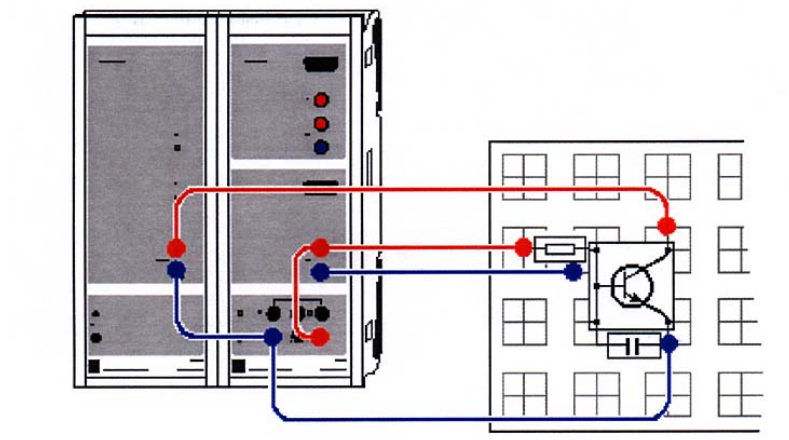


Abbildung 3.18: Beschaltung des CASSYs zur Aufnahme von Transistorkennlinien (Messung von I_C gegen I_B in Emitterschaltung).

sondere, daß sich die angelegte Spannung U_{0BE} aus der eigentlichen Spannungen am Transistor U_{BE} plus der am Widerstand abfallenden Spannung U_B zusammensetzt. Der Widerstand soll $R_B = 10\,k\Omega$ betragen.

- Die Spannung U_{CE} wird vom Power-CASSY geliefert und gemessen.
- Die Spannung U_{0BE} wird vom Sensor-CASSY geliefert.
- Der Kollektorstrom I_C wird vom Power-CASSY gemessen.
- In Versuchsteil a.) wird am Sensor-CASSY U_B gemessen.
- In Versuchsteil b.) werden am Sensor-CASSY U_B und U_{BE} gemessen.
- In Versuchsteil c.) wird am Sensor-CASSY U_{BE} gemessen.

Abb. 3.18 zeigt die Schaltung für a.).

a.) **Messung der Stromverstärkung:** Kollektorstrom I_C gegen Basisstrom I_B (bei festem U_{CE})
Bauen Sie die in Abbildung 3.18 gezeigte Schaltung auf (der eingezeichnete Kondensator ist nicht notwendig). Das Power–CASSY liefert eine feste Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} von 2 V (Einstellung DC). Am Sensor–CASSY wird U_{0BE} variiert und U_B über dem Widerstand gemessen (manuelle Aufnahme). Das Basisstrom ergibt sich dann zu $I_B = U_B/R_B$. Tragen Sie I_C gegen I_B auf.

b.) **Eingangskennlinie:** Basistrom I_B gegen Basis-Emitter-Spannung U_{BE}
Zusätzlich zu U_B wird die Basis-Emitter-Spannung U_{BE} wird mit dem Sensor-CASSY gemessen. Einstellungen wie in a.). Variieren Sie U_{0BE} manuell und messen Sie den Basisstrom. Tragen Sie I_B gegen U_{BE} auf.

c.) **Ausgangskennlinien:** Kollektorstrom I_C gegen Spannung U_{CE} (mit U_{BE} als Parameter)
Entfernen Sie die Meßverbindungen von U_B (gibt weniger Rauschen). Das Power-CASSY liefert nun ein variables U_{CE}, und wird wie bei der Aufnahme der Diodenkennlinien als Funktionsgenerator betrieben. Einstellungen: Stellbereich $0 - 10\,V$, Meßbereich $0 - 0.3\,A$, single shot, automatische Aufnahme. Messen Sie U_{BE} sowie U_{CE} mit dem Sensor-CASSY. Nehmen Sie einige Kennlinien bei unterschiedlichen, aber natürlich festen, U_{BE} auf (Kennlinien in ein Diagramm zeichnen, U_{BE}-Einstellungen merken!). Für die Auswertung empfiehlt es sich, die Kurven auch einzeln abzuspeichern.

3.2.2.4 Zusatzaufgabe

Falls Sie noch Zeit und Lust haben, können Sie die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes des Halbleiters bei Temperaturen unter Null Grad messen. Besorgen Sie sich hierfür flüssigen Stickstoff aus dem 5. Stock (gemeinsam mit dem Assistenten). Zweckmässigerweise kühlt man den Widerstand zuerst ab, wobei die Messung dann beim Erwärmen auf Zimmertemperatur durchgeführt wird. Befestigen Sie den Widerstand am Stativ und senken Sie ihn bis direkt über die Stickstoffoberfläche ab (nicht in das Bad eintauchen!). Leider ist der Halbleiter völlig von einem schützenden Metallröhrchen umgeben, so daß in dieser Anordnung nur die Temperatur des Röhrchens gemessen werden kann. Warten sie, bis sich eine minimale Temperatur eingestellt hat (typisch $-70\,°C$). Entfernen Sie Widerstand mit Temperaturfühler (der dabei möglichst in Kontakt mit dem Röhrchen bleiben sollte, damit er sich nicht sofort aufwärmt) aus dem Dewar und kontaktieren Sie rasch Temperatursensor und Halbleiter. Messen Sie den Widerstand beim Erwärmen bis auf Raumtemperatur.

Achtung: vermeiden Sie jeden direkten Haut- und Augenkontakt mit dem flüssigen Stickstoff.

3.2.3 Auswertung

Bitte diskutieren Sie die Fehlerquellen und geben Sie alle Resultate mit Fehler an.
Achtung: wie Sie sehen werden, sind die von Leybold angegebenen Fehler zu groß, um die statistischen Schwankungen (Fehlerbalken!) zu beschreiben. Sie sollten allerdings als systematische Fehler berücksichtigt werden. (Wie ändert sich ein Resultat, wenn alle Messwerte um (z.B.)

1 % zu hoch oder zu niedrig gemessen wären?) Als statistischer Fehler kann jeweils ein Drittel der Leybold-Werte angenommen werden. Eine Abschätzung des statistischen Fehlers ergibt sich, wenn man die Sensoren eine zeitlang mit hoher Rate ausliest und so ihr Rauschen mißt. Wenn man die Werte histogrammiert, erhält man eine (hoffentlich fast gaussische) Verteilung, deren Breite (RMS) eine Abschätzung für den statistischen Fehler ist.

zu **3.2.2.1: Temperaturabhängigkeit des Widerstandes**

- Tragen Sie $\ln R$ gegen $1/(2k_BT)$ auf und führen Sie eine Anpassung an die Kurve durch. Können Sie den exponentiellen Zusammenhang bestätigen?
- Berechnen Sie die Energielücke. Um welchen Halbleiter könnte es sich handeln?
- Welcher Zusammenhang ergibt sich für Platin?

zu **3.2.2.2: Kennlinien von Dioden**

- Zeichnen Sie die Diodenkennlinien.
- Bestimmen Sie die Schwellenspannungen als Asymptote an den Stromanstieg in Durchlaßrichtung und vergleichen Sie mit den Literaturwerten, soweit vorhanden.
- Verifizieren Sie für eine Diode (Zener- oder Siliziumdiode) die exponentielle Abhängigkeit des Stromes von der Spannung in Durchlaßrichtung.
- Bestimmen Sie für die Zener–Diode die Durchbruchsspannung.
- Schätzen Sie die Wellenlänge der Leuchtdiode aus der Formel $eU = hc/\lambda$ ab.

zu **3.2.2.3: Kennlinien eines npn-Transistors in Emitterschaltung**

zu a.) Stromverstärkung

- Zeichnen Sie die Kennlinie und führen Sie eine Geradenanpassung durch. Prüfen Sie, ob der Transistor ein linearer Stromverstärker ist.
- Bestimmen Sie die Gleichstromverstärkung und vergleichen Sie mit den im Datenblatt (bekommt man aus dem Internet) angegebenen Werten.

zu b.) Eingangskennlinie

- Tragen Sie die Kennlinie auf.

zu c.) Ausgangskennlinien

- Tragen Sie die Kennlinien auf.
- Prüfen Sie nach, ob der Sättigungsstrom tatsächlich exponentiell von U_{BE} abhängt.
- Zeichnen Sie für eine Batteriespannung von 2 V die Widerstandskennlinie in das Diagram ein, und bestimmen Sie aus den Messungen den Arbeitspunkt des Transistors (I_C, U_{CE}, U_{BE}, I_B).

Diskutieren Sie die Resultate in Ihrer Zusammenfassung.

Kapitel 4

Elektrizitätslehre

4.1 Grundlagen, Definitionen

4.2 Vorversuche zu Wechselstromwiderständen

4.2.1 Ohmscher Widerstand

4.2.2 Kapazitiver Widerstand

4.2.3 Induktiver Widerstand

4.3 Wechselstromschwingkreise

4.3.1 LCR-Serienschwingkreis

4.3.2 LCR-Parallelschwingkreis

Physikalische Grundlagen

Gleich- und Wechselspannungen; Fourieranalyse
Ohmsche, kapazitive und induktive Widerstände, Schaltung von Widerständen;
elektrische Leistungen (Momentan-, Schein- und Wirkleistung),
Effektivwerte von Strom und Spannung,
elektrische Schwingkreise, gedämpfte und erzwungene Schwingungen

4.1 Grundlagen, Definitionen

Wechsel-Ströme und -Spannungen

Unter Wechselstrom versteht man jeden Strom, der seine Stärke und Richtung periodisch ändert. Jede periodische Funktion läßt sich nach Fourier in eine Summe von Sinus- und Kosinus-Funktionen zerlegen. Allgemein gelte für Wechselströme und -spannungen:

$$I_\sim(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t + \phi_I) \qquad \text{bzw.} \qquad U_\sim(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t + \phi_U)$$

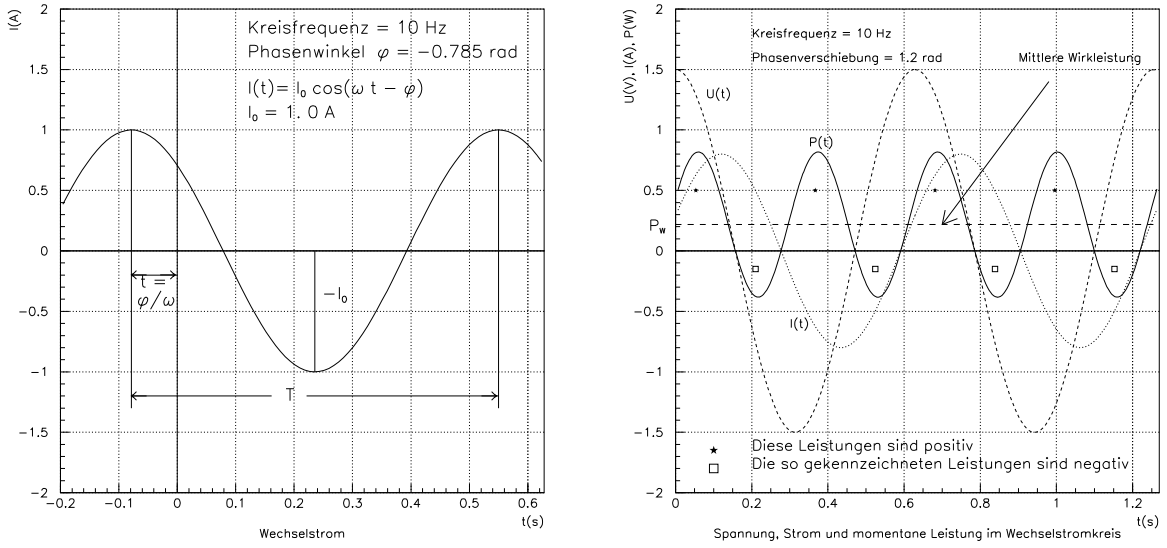
Wechselstromwiderstände können zu einer Phasenverschiebung zwischen der angelegten Wechselspannung $U_\sim(t)$ und dem Strom $I_\sim(t)$ im Leiterkreis führen. ϕ_U und ϕ_I sind die Phasen von Spannung und Strom zur Zeit t=0 (sog. **Nullphasen**). Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung wird (meist) definiert als:

$$\phi \;=\; \phi_U - \phi_I$$

Wählt man $\phi_U = 0$, so ergibt sich $\phi_I = -\phi$, also:

$$I_\sim(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t - \phi) \qquad \text{und} \qquad U_\sim(t) = U_0 \cdot \cos \omega t \tag{4.1}$$

Für $\phi_U - \phi_I = \phi > 0$ eilt die Spannung dem Strom voraus, für $\phi_U - \phi_I = \phi < 0$ läuft die Spannung dem Strom hinterher.



a) b)

Abbildung 4.1: a) Phasenverschobener Wechselstrom, b) Spannung, Strom und momentane Leistung

Abbildung 4.1 a) zeigt den Verlauf eines Stromes für den Phasenwinkel $\phi = -\phi_I = -\pi/4$ rad als Funktion der Zeit. Die dadurch bedingte Verschiebung in negative x-Richtung ist angegeben. Weiterhin sind die Periode T und die Amplitude I_0 eingezeichnet.

Effektivwerte, Leistungen

Betrachtet sei der Momentanwert der Leistung im Wechselstromkreis:

$$P(t) = U_\sim(t) \cdot I_\sim(t) = U_0 \cdot I_0 \cos\omega t \cdot \cos(\omega t - \phi) = \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot I_0[\cos\phi + \cos(2\omega t - \phi)]$$

$P(t)$ ist die **Momentanleistung**. Sie pulsiert mit der doppelten Frequenz und der Amplitude $U_0 \cdot I_0/2$ um den Mittelwert, die sogenannte **Wirkleistung**:

$$P_W \;=\; \frac{U_0 \cdot I_0}{2} \cdot \cos\phi \;=\; U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\phi \tag{4.2}$$

Hierüber kann man die **Effektivwerte von Spannung und Strom** definieren:

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \qquad \text{und} \qquad I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Diese Effektivwerte gelten in dieser Form nur für sinus- bzw. kosinusartige Spannungen und Ströme.
Neben dem Begriff der Wirkleistung benötigt man noch die Begriffe der **Blindleistung** und der **Scheinleistung**. Die Wirkleistung P_W wird im Mittel einem Verbraucher zugeführt. Sie wird in Ohmschen Widerständen in Wärmeenergie umgewandelt und geht für den Stromkreis verloren. Ein Ohmscher Widerstand speichert keine elektrische Energie! Abbildung 4.1 b) zeigt den zeitlichen Verlauf von Spannung, Strom und momentaner Leistung. Der Strom läuft in diesem Beispiel der Spannung um 1,2 rad = $68{,}8^0$ hinterher. Die mittlere Wirkleistung, um die die Momentanleistung pulsiert, ist durch die gestrichelte Gerade angedeutet. Wichtig ist, dass für die Berechnung der gesamten Wirkleistung alle Ohmschen Widerstände, auch z. B. die von Induktivitäten, berücksichtigt werden müssen.
Positive Beiträge der Momentanleistung werden von der Spannungsquelle geliefert, negative werden an die Spannungsquelle zurückgegeben.
Aus Gleichung 4.2 erkennt man, dass die Wirkleistung für $\phi = 0$ maximal wird; dann existieren nur positive Beiträge im Verlauf der Momentanleistung. Für $\phi = \pm\pi/2$ dagegen verschwindet die Wirkleistung, der Stromkreis enthält dann auch keine Ohmschen Widerstände.
Spulen und Kondensatoren sind sogenannte **Blindwiderstände (Reaktanzen)**. Für den Aufbau von magnetischen bzw. elektrischen Feldern wird die sogenannte **Blindleistung (P_B)** benötigt, die von der Spannungsquelle oder von anderen Blindwiderständen zur Verfügung gestellt wird. Beim Abbau der Felder wird die Blindleistung wieder abgegeben. Blindleistungen belasten im Mittel die Spannungsquelle nicht.
Blind- und Wirkleistung sind um $\pi/2$ phasenverschoben und lassen sich geometrisch zur **Scheinleistung** kombinieren:

$$P_B = \frac{U_0 \cdot I_0}{2} \cdot \sin\phi = U_{eff} \cdot I_{eff} \sin\phi \qquad \text{und} \qquad P_S = \sqrt{P_W^2 + P_B^2} = \frac{U_0 \cdot I_0}{2} = U_{eff} \cdot I_{eff}.$$

Schein- und Blindleistung haben nur in soweit eine physikalische Bedeutung, als sie für die Dimensionierung der Isolation von Spannungsträgern (bei Überspannungen) und der Stärke von Leitungen (bei Stromüberhöhungen) berücksichtigt werden müssen.

4.2 Wechselstromwiderstände

4.2.1 Ohmscher Widerstand

Nach Kirchhoff gilt für einen Stromkreis mit einer Spannungsquelle $U_\sim(t)$ und einem Ohmschen Widerstand R (mit dem Spannungsabfall $U_R = I \cdot R$):

$$U_\sim(t) = I_\sim(t) \cdot R$$

Zu jedem Zeitpunkt ist der Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand gleich der angelegten Spannung! Mit den Gleichungen 4.1 gilt:

$$U_0 \cdot \cos \omega t = R \cdot I_0 \cdot \cos(\omega t - \phi)$$

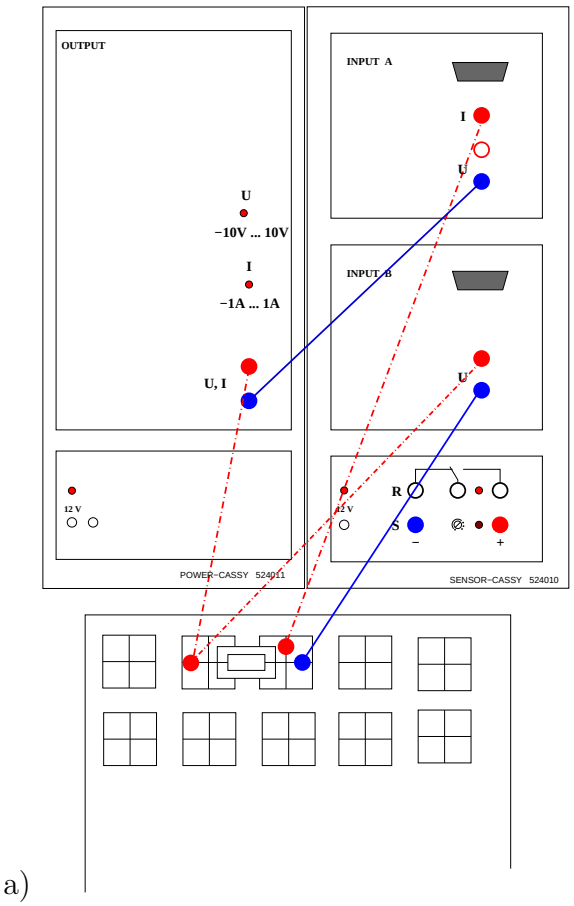
Dies ist für alle Zeiten nur erfüllt, wenn $\phi = 0$ gesetzt wird, d. h. Strom und Spannung sind in Phase. Ein Ohmscher Widerstand ändert nicht die Phase und hängt nicht von der Frequenz ab. In diesem Versuchsteil soll zum einen die Phasenbeziehung zwischen Strom und Spannung bei einem Ohmschen Widerstand bestimmt werden, und zum anderen sollen die Ohmschen Widerstände bezüglich ihres Widerstandwertes ausgemessen werden, die in den weiteren Versuchsteilen eingesetzt werden.

Versuchsaufbau

Einzelne Ohmsche Widerstände werden gemäß Abbildung 4.2 a) auf der Rastersteckplatte aufgebaut und an eine Wechselspannung gelegt. Als Spannungsquelle dient die Wechselspannungsquelle des POWER-CASSY-Interfaces, das sowohl die anliegende Wechselspannung als auch den Gesamtstrom im Kreis misst. Der Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand wird mit dem Spannungsmessgerät (Eingang B) und der Strom im Kreis mit dem Strommessgerät (Eingang A) des SENSOR-CASSY-Interfaces gemessen, der mit dem vom POWER-CASSY übereinstimmen sollte.

Versuchsdurchführung

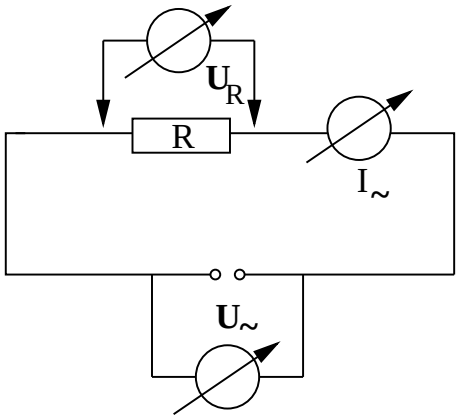
Der Funktionsgenerator POWER-CASSY kann verschiedenartige Wechselspannungen mit bis zu ± 10 V Amplituden und mit variablen Frequenzen liefern. In dem Dialogfenster **Einstellungen Funktionsgenerator** des POWER-CASSY wird zuerst die Stellgröße, der Stellbereich und der Messbereich festgelegt, die Art der Signalform (Sinus-, Rechteck, Sägezahnverlauf etc.) und deren Parameter (Frequenz, Amplitude der Wechselspannung **Vp**, Gleichspannungsoffset **V=** und Symmetrie der Signalform in Prozent), sowie die Messwerterfassung. Stellen Sie eine sinusförmige Wechselspannung mit einer Amplitude von z.B. 3 V und einer Frequenz von z.B. 1000 Hz ein. Messen Sie den Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand und den Strom im Kreis zur Bestimmung der Phasenverschiebung zwischen diesen beiden Messgrößen als Momentanwerte (Abb. 4.3 a) und zur Bestimmung des Ohmschen Widerstandes als Effektivwerte (Abb. 4.3b).
Achtung: Es werden nur dann Effektivwerte von den Messgeräten gemessen, wenn in den **Einstellungen: Messparameter anzeigen** die Intervallzeit auf 100 ms und die Anzahl auf 0 gesetzt werden!
Variieren Sie die Frequenz und wiederholen Sie die Messung.



a)

Benötigte Geräte:

1	Power-Cassy
1	Sensor-CASSY
1	CASSY Lab
1	Rastersteckplatte, DIN A4
1	STE Widerstand 47 Ω
1	STE Widerstand 20 Ω
1	STE Widerstand 10 Ω
1	STE Widerstand 5,1 Ω
1	STE Widerstand 1 Ω
3	Paar Kabel, 50 cm rot/blau



b)

Abbildung 4.2: a) Versuchsaufbau zum Ohmschen Widerstand, b) Schaltbild

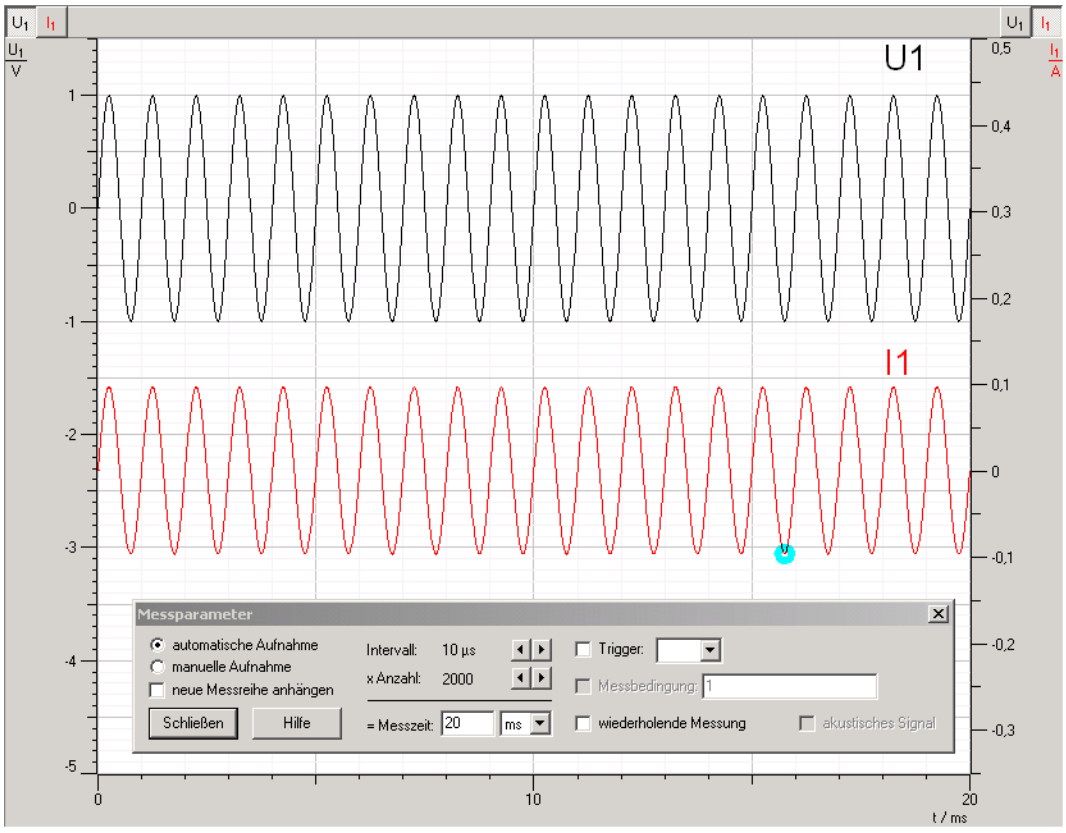
Versuchsauswertung

Phasenbeziehung:
Bestimmen Sie die Phasenbeziehung zwischen Strom und Spannung, indem Sie die zeitliche Differenz zwischen den Nulldurchgängen der Strom- und Spannungsmessungen ermitteln und mit der Dauer einer Periode (entsprechend 360°) vergleichen. Alternativ können auch die Extremalwerte der Strom- und Spannungsmessung benutzt werden.

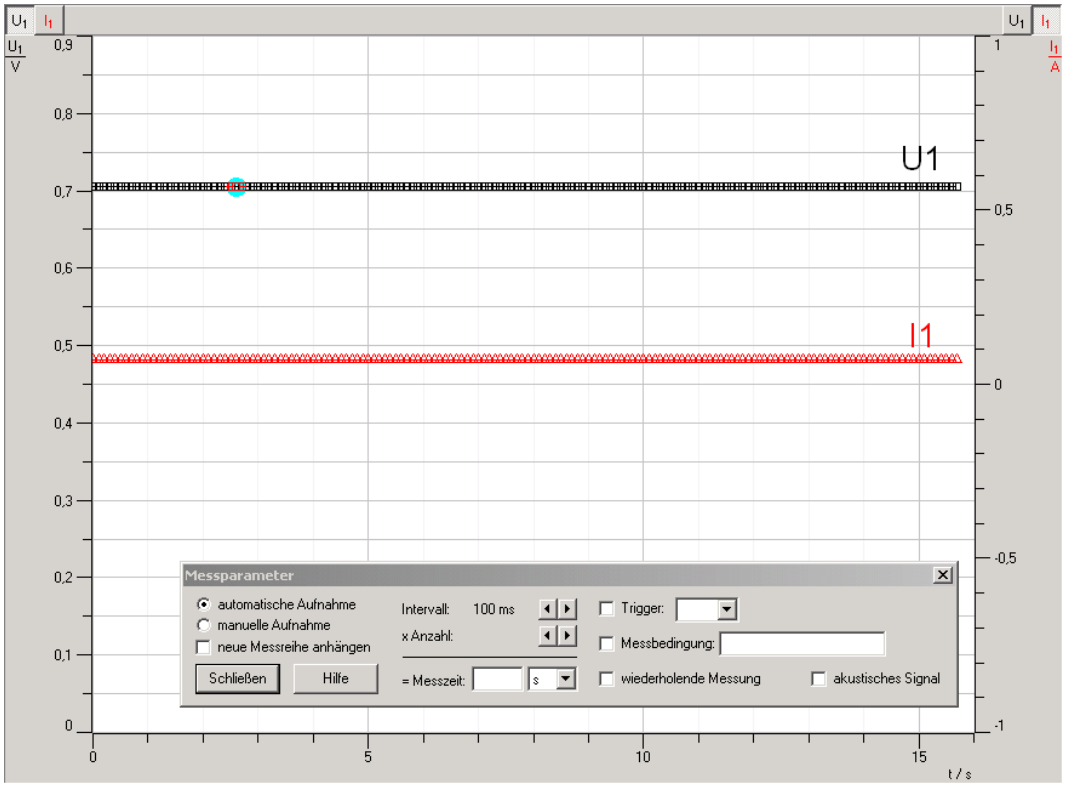
$$\Delta\phi = \frac{\Delta t}{T} \cdot 360^\circ$$

Führen Sie die Bestimmung der Phasenverschiebungen mehrmals durch und geben Sie den Mittelwert und den mittleren Fehler an.
Ohmscher Widerstand:
Bestimmen Sie aus den Verteilungen der Effektivwerte der Strom- und Spannungsmessungen gegen die Zeit den jeweiligen Mittelwert, die Standardabweichung und den mittleren Fehler des Mittelwertes.

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}, \qquad \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$



a)



b)

Abbildung 4.3: a) Momentanwert- und b) Effektivwertmessung des Spannungsabfalls am Ohmschen Widerstand und des Stromes im Kreis

Berechnen Sie den Ohmschen Widerstand sowie den Fehler mittels Fehlerfortpflanzung.

$$R = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}, \qquad \frac{\sigma_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_U}{\overline{U}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{\overline{I}}\right)^2}$$

Berücksichtigen Sie ebenfalls den systematischen Fehler mittels Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_{U,sys} = 0,01 \cdot U_i + 0,005 \cdot U_{\text{Bereichsendwert}} \qquad \sigma_{I,sys} = 0,02 \cdot I_i + 0,005 \cdot I_{\text{Bereichsendwert}}$$

Geben Sie die Ergebnisse mit statistischen und systematischen Fehlern an.

4.2.2 Kapazitiver Widerstand

Im Kreis befinde sich nur ein Kondensator mit der Kapazität C. Bei Anlegen einer Wechselspannung wird der Kondensator periodisch geladen und entladen, es fließt ein Wechselstrom im Kreis. Da kein Ohmscher Widerstand im Kreis vorhanden sein soll, erfolgt die Ladung und Entladung von C momentan. Nach Abbildung 4.4 b) folgt mit dem Spannungsabfall $U_C(t) = Q(t)/C$ aus der Maschenregel:

$$U_\sim(t) = \frac{Q(t)}{C} \rightarrow \frac{dU_\sim(t)}{dt} = \frac{I_\sim(t)}{C}$$

$$I_\sim(t) = C \cdot \frac{dU_\sim(t)}{dt} = -\omega \cdot C \cdot U_0 \cdot \sin \omega t = \omega \cdot C \cdot U_0 \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Wie in Abbildung 4.5 veranschaulicht eilt der Strom $I_\sim(t)$ der angelegten Spannung $U_\sim(t)$ um $\frac{\pi}{2}$ voraus, das heißt $\phi = -\pi/2$. Die Kapazität stellt für Wechselstrom einen sog. **kapazitiven Widerstand** (**Kondensanz** X_C) dar. Nach dem Ohmschen Gesetz ergibt sich der kapazitive Wechselstromwiderstand X_C zu:

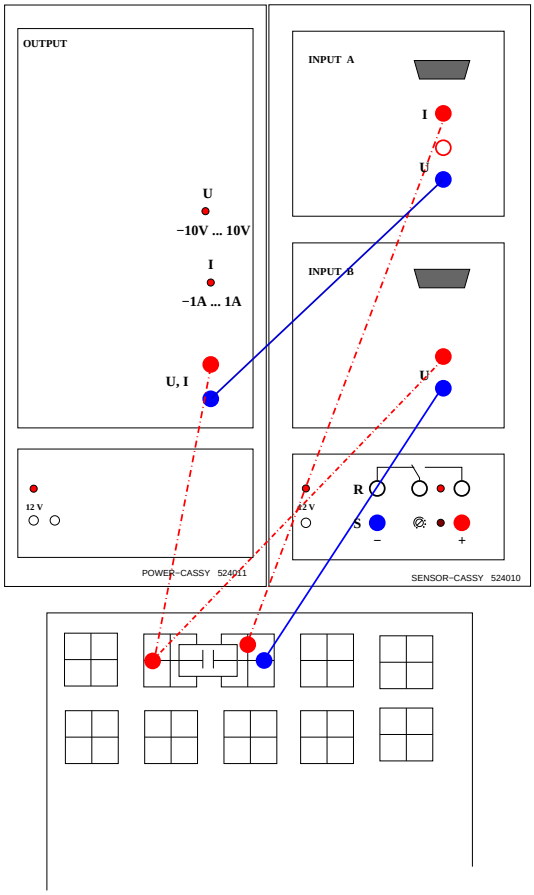
$$X_C = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

Der kapazitive Widerstand X_C ist frequenzabhängig.
Bestimmen Sie die Phasenbeziehung zwischen Strom und Spannung bei einem rein kapazitiven Kreis und bestimmen sie den Wert des kapazitiven Widerstandes X_C und die Kapazität C des verwendeten Kondensators. Die Größen sind für die Versuchsteile Wechselstromschwingkreise notwendig.

Versuchsaufbau

Einzelne Kondensatoren werden gemäß Abbildung 4.4 a) auf der Rastersteckplatte aufgebaut und an Wechselspannung gelegt. Als Spannungsquelle dient die Wechselspannungsquelle des POWER-CASSY-Interfaces, das sowohl die anliegende Wechselspannung als auch den Gesamtstrom im Kreis angibt. Der Spannungsabfall am Kondensator wird mit dem Spannungsmessgerät (Eingang B) und der Strom im Kreis mit dem Strommessgerät (Eingang A) des SENSOR-CASSY-Interfaces gemessen.

a)



Benötigte Geräte:

1	Power-Cassy
1	Sensor-CASSY
1	CASSY Lab
1	Rastersteckplatte, DIN A4
1	STE Kondensator 10μ F
1	STE Kondensator 4,7 μ F
3	Paar Kabel, 50 cm rot/blau

b)

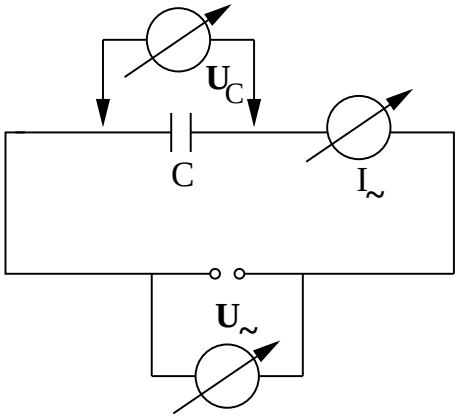


Abbildung 4.4: a) Versuchsaufbau zum kapazitiven Widerstand, b) Schaltbild

Versuchsdurchführung

Der Funktionsgenerator POWER-CASSY kann verschiedenartige Wechselspannungen mit bis zu ± 10 V Amplituden und mit variablen Frequenzen liefern. In dem Dialogfenster **Einstellungen Funktionsgenerator** des POWER-CASSY wird zuerst die Stellgröße, der Stellbereich und der Messbereich festgelegt, die Art der Signalform (Sinus-, Rechteck, Sägezahnverlauf etc.) und deren Parameter (Frequenz, Amplitude der Wechselspannung **Vp**, Gleichspannungsoffset **V=** und Symmetrie der Signalform in Prozent), sowie die Messwerterfassung. Stellen Sie eine sinusförmige Wechselspannung mit einer Amplitude von z.B. 3 V und einer Frequenz von z.B. 1000 Hz ein. Messen Sie den Spannungsabfall am Kondensator und den Strom im Kreis zur Bestimmung der Phasenverschiebung zwischen diesen beiden Messgrößen als Momentanwerte (Abb. 4.5 a) und zur Bestimmung des kapazitiven Widerstandes als Effektivwerte (Abb. 4.5b).
Achtung: Es werden nur dann Effektivwerte von den Messgeräten gemessen, wenn in den **Einstellungen: Messparameter anzeigen** die Intervallzeit auf 100 ms und die Anzahl auf 0 gesetzt werden!
Zur Variation der Frequenz kann im Menü Einstellungen bei **Parameter/Formel/FFT** die Frequenz f_1 als Formel definiert werden, allerdings müssen alle verwendeten Parameter in der Formel vorher definiert worden sein: $f_1 = f_0 + (n-1) * 20$ mit f_0 =Startfrequenz. Dies bewirkt

eine schrittweise Erhöhung der Startfrequenz f_0 um 20 Hz bis zur maximal vorgegebenen Frequenz, wenn bei **Einstellungen Funktionsgenerator** bei Parameter anstatt z.B. 1000 Hz das vorher definierte Symbol f_1 eingegeben wird.
Zusätzlich muß bei **Einstellungen Messparameter anzeigen** eine Messbedingung vorgegeben werden, die eine Messwertaufnahme bis 5 kHz begrenzt, aber frühestens nach $2/f_1 + 2$ s nach einer Frequenzerhöhung (Einschwingzeit) den Messwert aufnimmt:

$$f_1 < 5000 \; and \; delta \; t > 2/f_1 + 2$$

Auftretende Störungen bei der Messung des kapazitiven Widerstandes mit steigender Frequenz können mit einem in Reihe geschalteten Ohmschen Widerstand geglättet werden.

Versuchsauswertung

Phasenverschiebung $\Delta\phi$:
Bestimmen Sie die Phasenbeziehung zwischen Strom und Spannung bei einer fest eingestellten Frequenz, indem Sie die zeitliche Differenz zwischen den Nulldurchgängen der Strom- und Spannungsmessungen ermitteln und mit der Dauer einer Periode (entsprechend 360°) vergleichen (Abb. 4.5a). Alternativ können auch die Extremalwerte der Strom- und Spannungsmessung benutzt werden.

$$\Delta\phi = \frac{\Delta t}{T} \cdot 360^\circ$$

Führen Sie die Bestimmung der Phasenverschiebungen mehrmals durch und geben Sie den Mittelwert und den mittleren Fehler an. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der vom Cassy-Lab angegebenen Phasenverschiebung.
Ein zur Glättung der Strommessung verwendeter zusätzlicher Ohmscher Widerstand R beeinflußt die Phasenverschiebung ϕ. Vergleichen Sie die Messung mit der Erwartung:

$$\tan\phi = \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R}$$

Kapazität C:
Bestimmen Sie den kapazitiven Widerstand $X_C = \frac{U}{I}$, variieren Sie die Frequenz ω, tragen Sie den reziproken kapazitiven Widerstand $\frac{1}{X_C}$ gegen die Frequenz ω auf und ermitteln Sie die Kapazität C aus der Steigung der mittels linearer Regression an die Messdaten angepassten Gerade. Wurde ein zusätzlicher Ohmscher Widerstand R benutzt, gilt:

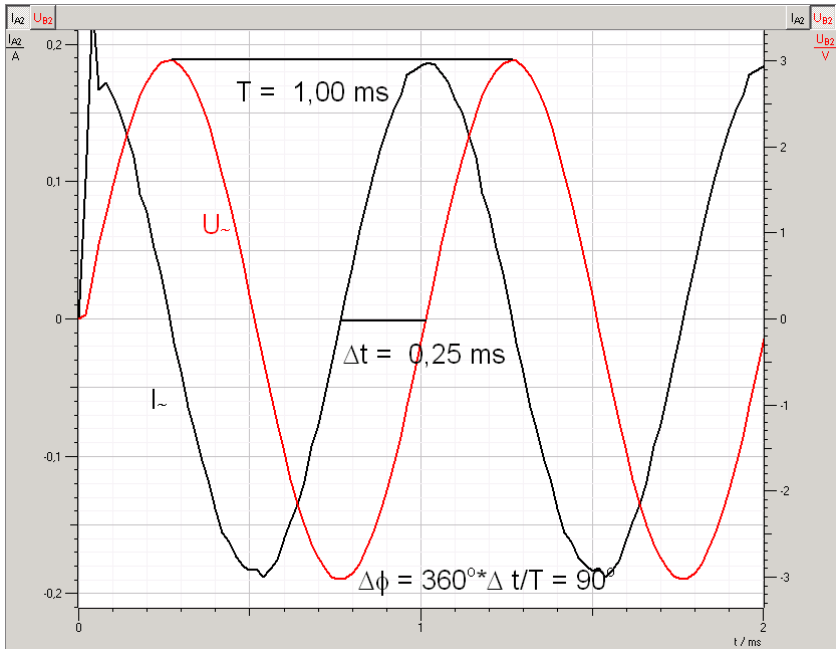
$$Z^2 = R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2$$

Berücksichtigen Sie die systematischen Fehler der Strom- und Spannungsmessung:

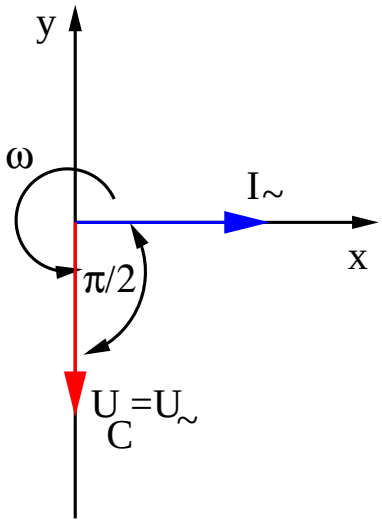
$$\sigma_{U,sys} = 0,01 \cdot U_i + 0,005 \cdot U_{\text{Bereichsendwert}}, \qquad \sigma_{I,sys} = 0,02 \cdot I_i + 0,005 \cdot I_{\text{Bereichsendwert}}$$

Geben Sie die Ergebnisse mit statistischen und systematischen Fehlern an.

a)



b)



c)

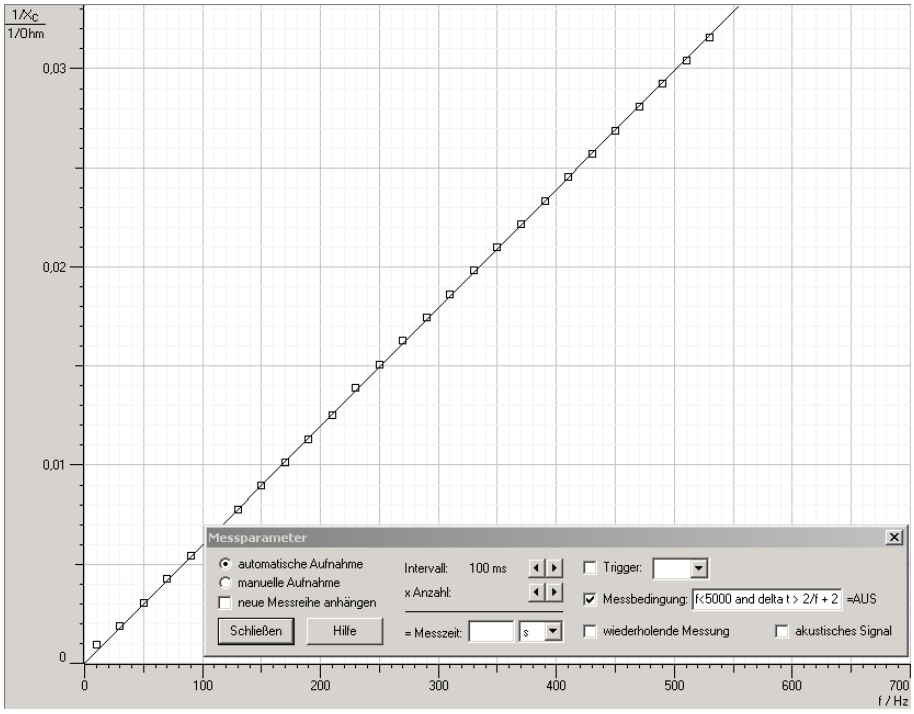


Abbildung 4.5: a) Bestimmung der Phasenverschiebung zwischen U und I im rein kapazitiven Kreis, b) Zeigerdarstellung, c) Frequenzabhängigkeit des kapazitiven Widerstandes X_C.

4.2.3 Induktiver Widerstand

Nach Abbildung 4.6 b) liefert die Maschenregel, dass die Spannung zwischen den Polen der Spannungsquelle gleich ist dem Spannungsabfall an der Induktivität ($U_L(t) = L \cdot \frac{dI_\sim}{dt}$):

$$U_0 \cdot \cos\omega t = L \cdot \frac{dI_\sim}{dt} \quad \rightarrow \quad dI_\sim(t) = \frac{U_0}{L} \cdot \cos\omega t\, dt \quad \rightarrow \quad I_\sim(t) = \frac{U_0}{\omega \cdot L} \cdot \sin\omega t$$

und damit:

$$I_\sim(t) = \frac{U_0}{\omega L} \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Wie in Abbildung 4.7 veranschaulicht, eilt der Strom I(t) der angelegten Spannung U(t) um $\frac{\pi}{2}$ nach, das heißt $\phi = \pi/2$. Obwohl der Kreis bei einer idealen Spule keinen Ohmschen Widerstand besitzt, erhält er durch die Induktivität für den Wechselstrom einen Widerstand X_L, den man **induktiven Widerstand** oder **Induktanz** nennt. Nach dem Ohmschen Gesetz ergibt sich der induktive Wechselstromwiderstand X_L zu:

$$X_L = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_0}{I_0} = \omega \cdot L$$

Der induktive Widerstand X_L ist frequenzabhängig.
Bestimmen Sie die Phasenbeziehung zwischen Strom und Spannung bei einem rein induktiven Kreis und bestimmen sie den Wert des induktiven Widerstandes X_L sowie die Induktivität L und den inneren Widerstand R_L der verwendeten Spulen.

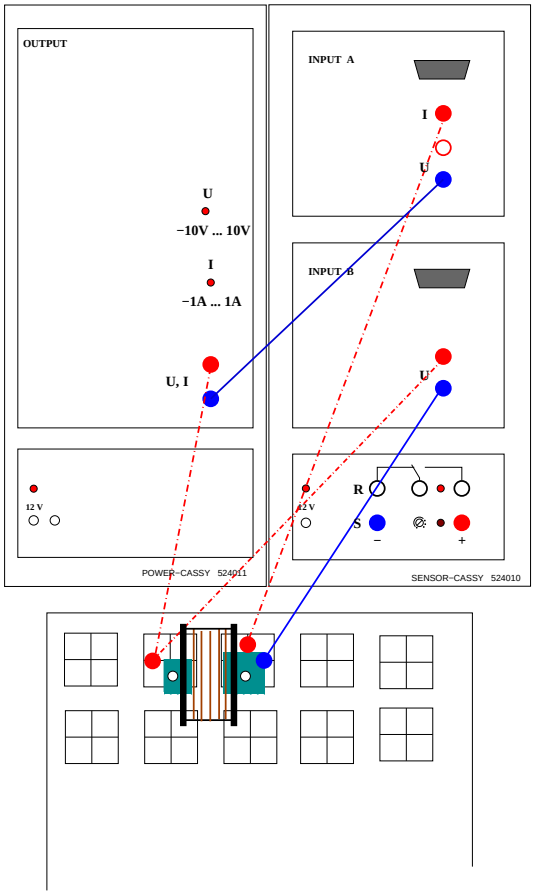
Versuchsaufbau

Einzelne Spulen werden gemäß Abbildung 4.6 a) auf der Rastersteckplatte aufgebaut und an eine Wechselspannung gelegt. Als Spannungsquelle dient die Wechselspannungsquelle des POWER-CASSY-Interfaces, das sowohl die anliegende Wechselspannung als auch den Gesamtstrom im Kreis angibt. Der Spannungsabfall an der Spule wird mit dem Spannungsmessgerät (Eingang B) und der Strom im Kreis mit dem Strommessgerät (Eingang A) des SENSOR-CASSY-Interfaces gemessen.

Versuchsdurchführung

Der Funktionsgenerator POWER-CASSY kann verschiedenartige Wechselspannungen mit bis zu ± 10 V Amplituden und mit variablen Frequenzen liefern. In dem Dialogfenster **Einstellungen Funktionsgenerator** des POWER-CASSY wird zuerst die Stellgröße, der Stellbereich und der Messbereich festgelegt, die Art der Signalform (Sinus-, Rechteck, Sägezahnverlauf etc.) und deren Parameter (Frequenz, Amplitude der Wechselspannung **Vp**, Gleichspannungsoffset **V=** und Symmetrie der Signalform in Prozent), sowie die Messwerterfassung. Stellen Sie eine sinusförmige Wechselspannung mit einer Amplitude von z.B. 3 V und einer Frequenz von z.B. 1000 Hz ein. Messen Sie den Spannungsabfall an der Spule und den Strom im Kreis zur Bestimmung der Phasenverschiebung zwischen diesen beiden Messgrößen als Momentanwerte (Abb. 4.7 a) und zur Bestimmung des induktiven Widerstandes als Effektivwerte (Abb. 4.7b).

a)



Benötigte Geräte:

1	Power-Cassy
1	Sensor-CASSY
1	CASSY Lab
1	Rastersteckplatte, DIN A4
1	Spule 250 Windungen
1	Spule 500 Windungen
1	Spule 1000 Windungen
3	Paar Kabel, 50 cm rot/blau

b)

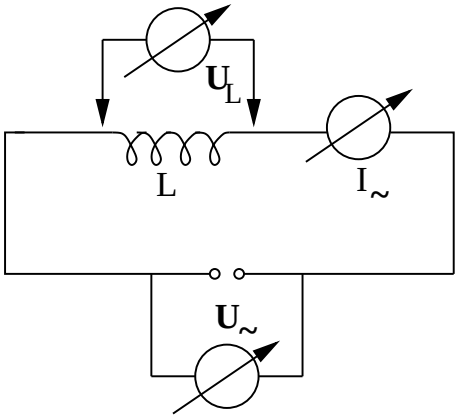


Abbildung 4.6: a) Versuchsaufbau zum induktiven Widerstand, b) Schaltbild

Achtung: Es werden nur dann Effektivwerte von den Messgeräten gemessen, wenn in den **Einstellungen: Messparameter anzeigen** die Intervallzeit auf 100 ms und die Anzahl auf 0 gesetzt werden!
Zur Variation der Frequenz kann im Menü Einstellungen bei **Parameter/Formel/FFT** die Frequenz f_1 als Formel definiert werden, allerdings müssen alle verwendeten Parameter in der Formel vorher definiert worden sein: $f_1 = f_0 + (n-1) * 20$ mit f_0 =Startfrequenz. Dies bewirkt eine schrittweise Erhöhung der Startfrequenz f_0 um 20 Hz bis zur maximal vorgegebenen Frequenz, wenn bei **Einstellungen Funktionsgenerator** bei Parameter anstatt z.B. 1000 Hz das vorher definierte Symbol f_1 eingegeben wird.
Zusätzlich muß bei **Einstellungen Messparameter anzeigen** eine Messbedingung vorgegeben werden, die eine Messwertaufnahme bis 5 kHz begrenzt, aber frühestens nach $2/f_1 + 2$ s nach einer Frequenzerhöhung (Einschwingzeit) den Messwert aufnimmt:

$$f_1 < 5000 \; and \; delta \; t > 2/f_1 + 2$$

Auftretende Störungen bei der Messung des induktiven Widerstandes mit steigender Frequenz können mit einem in Reihe geschalteten Ohmschen Widerstand geglättet werden.

Versuchsauswertung

Phasenverschiebung $\Delta\phi$:
Bestimmen Sie die Phasenbeziehung zwischen Strom und Spannung bei einer fest eingestellten Frequenz, indem Sie die zeitliche Differenz zwischen den Nulldurchgängen der Strom- und Spannungsmessungen ermitteln und mit der Dauer einer Periode (entsprechend 360°) vergleichen (Abb. 4.7a). Alternativ können auch die Extremalwerte der Strom- und Spannungsmessung benutzt werden.

$$\Delta\phi = \frac{\Delta t}{T} \cdot 360^\circ$$

Führen Sie die Bestimmung der Phasenverschiebungen mehrmals durch und geben Sie den Mittelwert und den mittleren Fehler an. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der vom Cassy-Lab angegebenen Phasenverschiebung.

Ein zur Glättung der Strommessung verwendeter zusätzlicher Ohmscher Widerstand R beeinflußt die Phasenverschiebung ϕ. Vergleichen Sie die Messung mit der Erwartung:

$$\tan\phi = \frac{\omega \cdot L}{R_L + R}$$

Induktivität L und innerer Widerstand R_L:
Bestimmen Sie den induktiven Widerstand $X_L = \frac{U}{I}$, variieren Sie die Frequenz ω, tragen Sie den quadrierten induktiven Widerstand X_L gegen das Quadrat der Frequenz ω auf, ermitteln Sie die Induktivität L aus der Steigung und den inneren Widerstand R_L der Spule aus dem Achsenabschnitt der mittels linearer Regression an die Messdaten angepassten Gerade (Abb. 4.7c). Wurde ein zusätzlicher Ohmscher Widerstand R benutzt, gilt:

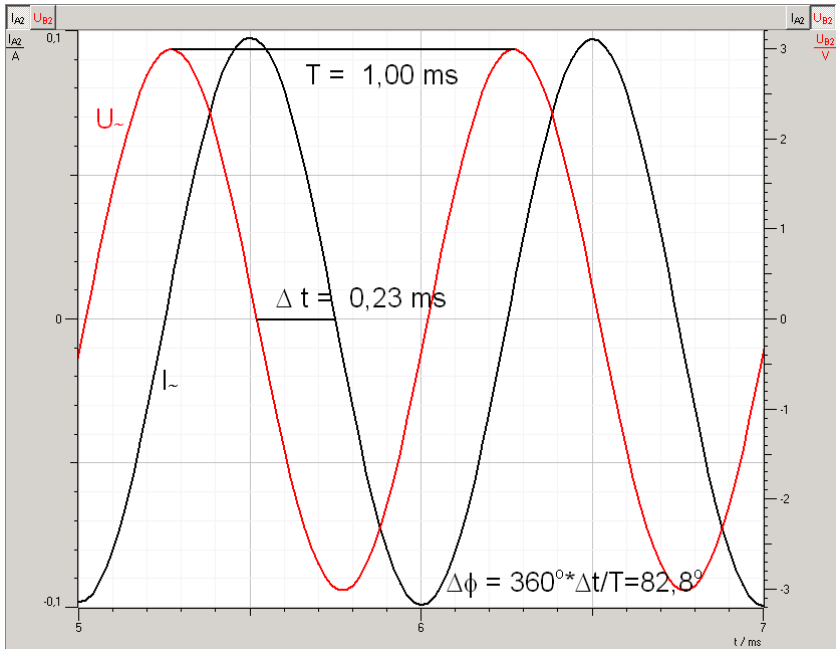
$$Z^2 = (R + R_L)^2 + (\omega \cdot L)^2$$

Berücksichtigen Sie die systematischen Fehler der Strom- und Spannungsmessung:

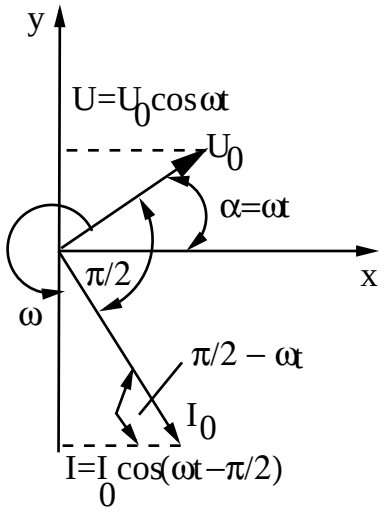
$$\sigma_{U,sys} = 0,01 \cdot U_i + 0,005 \cdot U_{\text{Bereichsendwert}}, \qquad \sigma_{I,sys} = 0,02 \cdot I_i + 0,005 \cdot I_{\text{Bereichsendwert}}$$

Geben Sie die Ergebnisse mit statistischen und systematischen Fehlern an.

a)



b)



c)

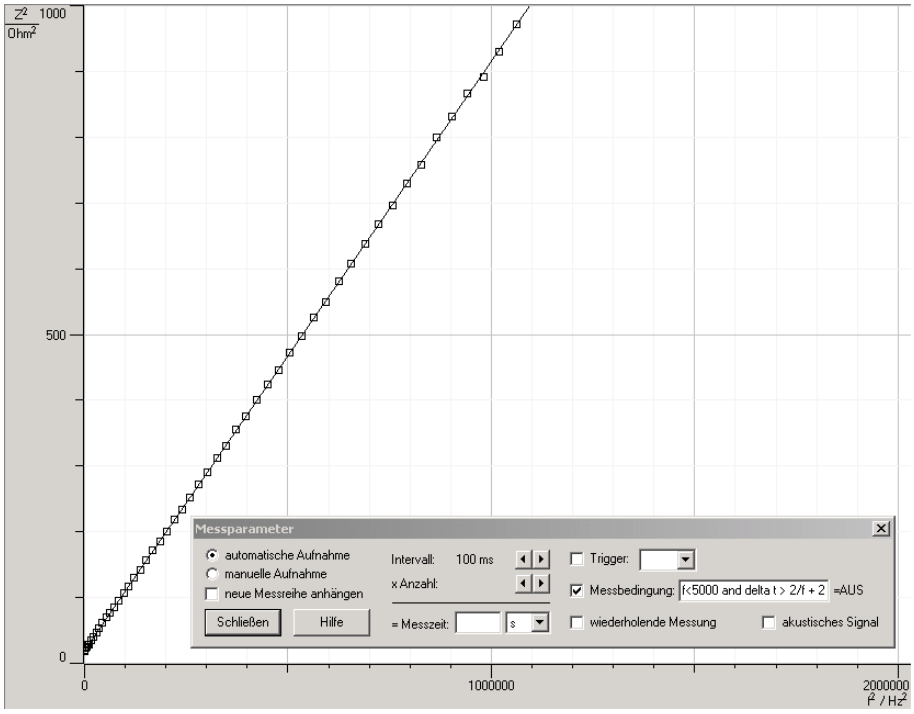


Abbildung 4.7: a) Bestimmung der Phasenverschiebung zwischen U und I im induktiven Kreis, b) Zeigerdarstellung (ideal), c) Frequenzabhängigkeit des induktiven Widerstandes X_L.

4.3 Wechselstromschwingkreise

Allgemeine Anmerkungen
Bei einem Serienschwingkreis führt eine angelegte Wechselspannung zu einem meist phasenverschobenen Strom, der durch alle Komponenten des Schwingkreises fließt, also in allen Widerständen den jeweils gleichen Momentanwert besitzt. Aus diesem Strom errechnet man mit den speziellen Widerständen die zugehörigen, wiederum phasenverschobenen Spannungsabfälle. Diese Spannungsabfälle können beträchtlich größer sein als die angelegte Spannung.
Beim Parallelschwingkreis liegt dagegen an allen Widerständen die gleiche Wechselspannung. Daher ergibt sich für jeden Zweig ein Strom, dessen Größe und Phase von der angelegten Spannung und dem speziellen Widerstand in diesem Zweig abhängt. Diese Ströme können beträchtlich größer sein als der zum Schwingkreis hinfließende Strom.

4.3.1 Serienschwingkreis von L, R und C

Mit der Kirchhoffschen Maschenregel folgt, dass die angelegte Spannung gleich der Summe aller Spannungsabfälle ist:

$$U_\sim(t) \;=\; U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = L \cdot \frac{dI_\sim}{dt} + I_\sim \cdot R + \frac{Q}{C}$$

$$\frac{U_\sim(t)}{L} = \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot Q$$

Dies ist die Differentialgleichung einer erzwungenen gedämpften Schwingung für die elektrische

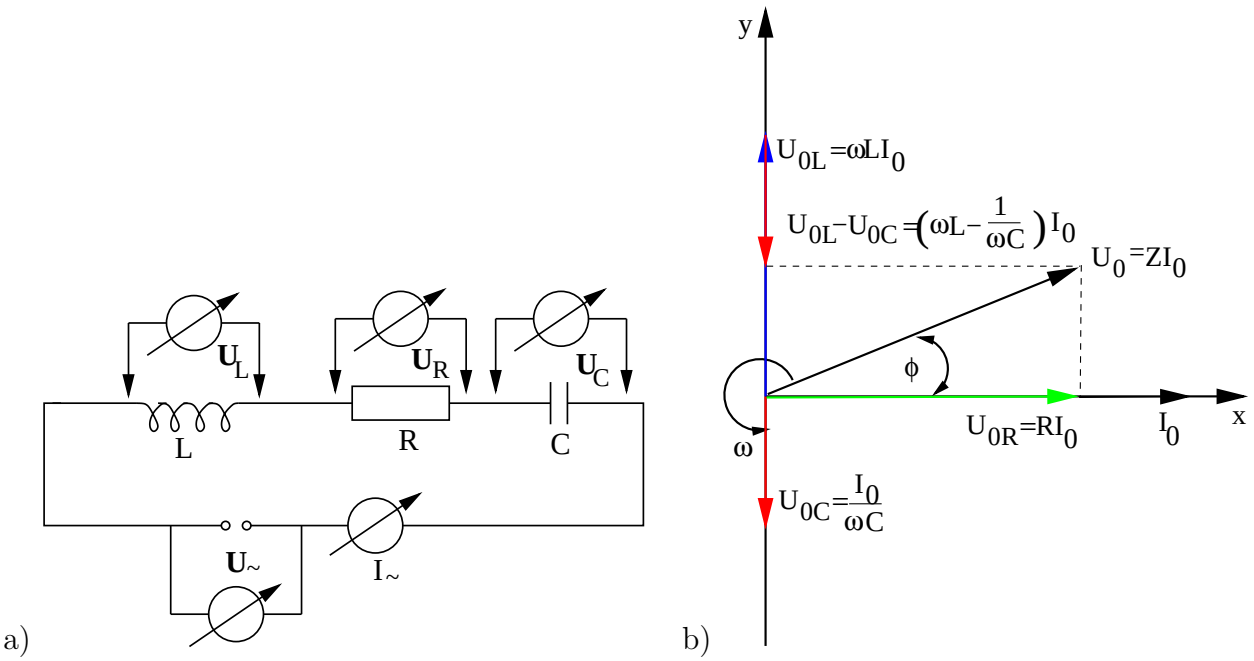


Abbildung 4.8: a) Schaltbild eines L,R und C Serienschwingkreises, b) Zeigerdarstellung

Ladung. Die Differentialgleichung für den Strom lautet dann:

$$\frac{d^2 I_\sim}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dI_\sim}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot I_\sim = \frac{1}{L} \cdot \frac{dU_\sim(t)}{dt} \tag{4.3}$$

Es wird nur die **partikuläre Lösung** diskutiert, die sich nach dem sogenannten Einschwingvorgang einstellt.

Lösungsansatz:

Für die angelegte Spannung und für den phasenverschobenen Strom sei

$$U_\sim(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t} \qquad I_\sim = I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi)}$$

Damit ergibt sich:

$$-\omega^2 I_0 \cdot e^{i(\omega t-\phi)} + i\omega \frac{R}{L} I_0 \cdot e^{i(\omega t-\phi)} + \frac{1}{LC} I_0 \cdot e^{i(\omega t-\phi)} \;=\; i\omega \frac{U_0}{L} e^{i\omega t}$$

Für den rein reellen und den rein imaginären Anteil ergibt sich:

$$-\omega^2 I_0 \cdot \cos\phi + \omega \frac{R}{L} I_0 \cdot \sin\phi + \frac{1}{LC} I_0 \cdot \cos\phi = 0 \tag{4.4}$$

$$\omega^2 I_0 \cdot \sin\phi + \omega \frac{R}{L} I_0 \cdot \cos\phi - \frac{1}{LC} I_0 \cdot \sin\phi = \omega \frac{U_0}{L} \tag{4.5}$$

Aus Gleichung 4.4 findet man sofort die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung, ebenso wie aus der Addition der Spannungen im Zeigerdiagramm (Abbildung 4.8b):

$$\tan\phi \;=\; \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \tag{4.6}$$

Für $\omega L - \dfrac{1}{\omega C} > 0$ ist $0 < \phi < \pi/2$ $\quad\rightarrow\quad$ Phasennacheilung des Stromes (L überwiegt)

Für $\omega L - \dfrac{1}{\omega C} < 0$ ist $-\pi/2 < \phi < 0$ $\quad\rightarrow\quad$ Phasenvoreilung des Stromes (C überwiegt)

Aus den Gleichungen 4.4 und 4.5 ergibt sich für die Stromamplitude I_0:

$$I_0 \;=\; \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \;=\; \frac{U_0}{Z} \tag{4.7}$$

mit dem **Scheinwiderstand (Impedanz)**:

$$Z \;=\; \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \tag{4.8}$$

Die Impedanz wird minimal und der Strom maximal bei der Resonanzfrequenz

$$f_0 \;=\; \frac{\omega_0}{2\pi} \;=\; \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{Thomsonsche Gleichung} \tag{4.9}$$

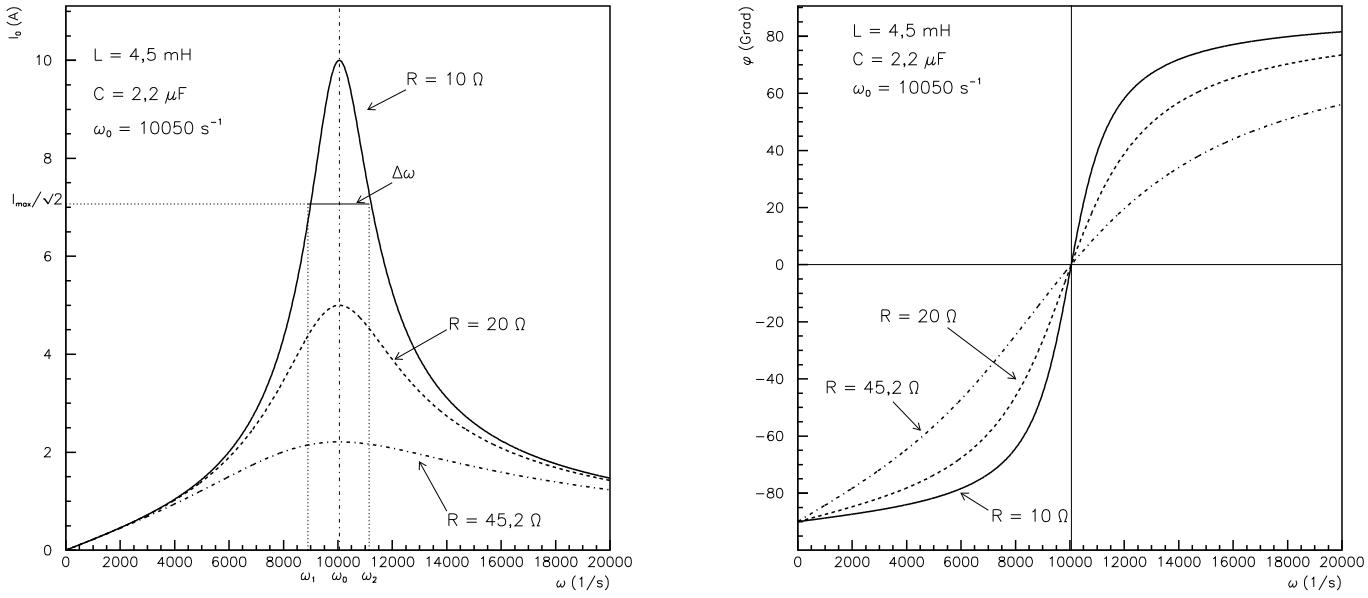


Abbildung 4.9: Resonanzkurve und Phasenverschiebung bei R, L und C-Serienkreis.

Bei dieser Frequenz ist $Z(f_0) = Z_{min} = R$ und die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung $\phi = 0$ bei verlustfreien Widerständen, d.h. der Kreis verhält sich bei der Resonanzfrequenz wie ein rein Ohmscher Widerstand und die von der Spannungsquelle in den Schwingkreis gesteckte Leistung wird ebenfalls maximal und ist eine reine Wirkleistung.
Die Abbildung 4.9 zeigt Strom und Phasenverschiebung als Funktion der Kreisfrequenz für verschiedene Dämpfungen. An Gleichung 4.7 erkennt man unmittelbar, dass der Strom für $\omega \to 0$ gegen null geht, der Kondensator sperrt für eine Gleichspannung den Stromfluss. Durch Aufsuchen des Strommaximums als Funktion der Frequenz findet man, dass **das Maximum unabhängig von der Dämpfung immer an der gleichen Stelle bei f_0 liegt**.

Dämpfung und Güte bei Serienschaltung

Dämpfungen entstehen primär durch den Ohmschen Widerstand des Stromkreises. Bei fehlendem Ohmschen Widerstand spielen Verluste in der Spule (durch den Ohmschen Widerstand der Spule) und in Kondensatoren (durch die Leitfähigkeit des Dielektrikums, Umpolarisation, Wärmeentwicklung) eine Rolle. Wegen der Serienschaltung enthält R hier alle Ohmschen Widerstände des Kreises, insbesondere also auch den Ohmschen Spulenwiderstand.
Wie bei mechanischen Schwingungen findet man die Definition für die Dämpfung aus der Differentialgleichung 4.3:

$$d = \frac{R}{2L}$$

Die Dämpfung beeinflusst unmittelbar die Breite der Resonanzkurve. Zwischen den Frequenzen

der Resonanzkurve, bei denen der Strom auf $I_{max}/\sqrt{2}$ gefallen ist, gilt für die Breite:

$$\Delta\omega \;=\; 2d \;=\; \frac{R}{L}$$

Die relative Breite der Resonanzkurve nennt man häufig **Verlustfaktor des Schwingkreises**.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \;=\; \frac{2d}{\omega_0} \;=\; \frac{R}{\omega_0 L} \;=\; R\cdot\omega_0 C \;=\; R\cdot\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Je geringer die Dämpfung ist, umso größer ist die **Güte des Serienschwingkreises**:

$$Q_S \;=\; \frac{\omega_0}{2d} = \frac{1}{R}\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Spannungsresonanz

In unmittelbarer Nähe der Resonanzfrequenz können die Spannungen, die an Induktivität und Kapazität abfallen, die angelegte Spannung um ein Vielfaches überschreiten. Aus obigen Relationen folgt für die Spannungsüberhöhung im Resonanzfall:

$$\frac{U_L(\omega_0)}{U_\sim(\omega_0)} \;=\; \frac{I_0\omega_0 L}{I_0 R} \;=\; \frac{\omega_0 L}{R} \;=\; \frac{1}{\omega_0 C R} \;=\; \frac{1}{R}\cdot\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{4.10}$$

Dies entspricht der Güte des Schwingkreises!
Spannungsüberhöhungen sind in der Wechselstromtechnik sehr gefürchtet, da beim Durchschlag von Isolatoren und Kabeln Leiterteile beschädigt werden können!

Messung der Güte:

Die Güte des Schwingkreises kann auf verschiedene Weisen bestimmt werden:

1.) Durch Messung von Resonanzfrequenz und Breite der Resonanzkurve.

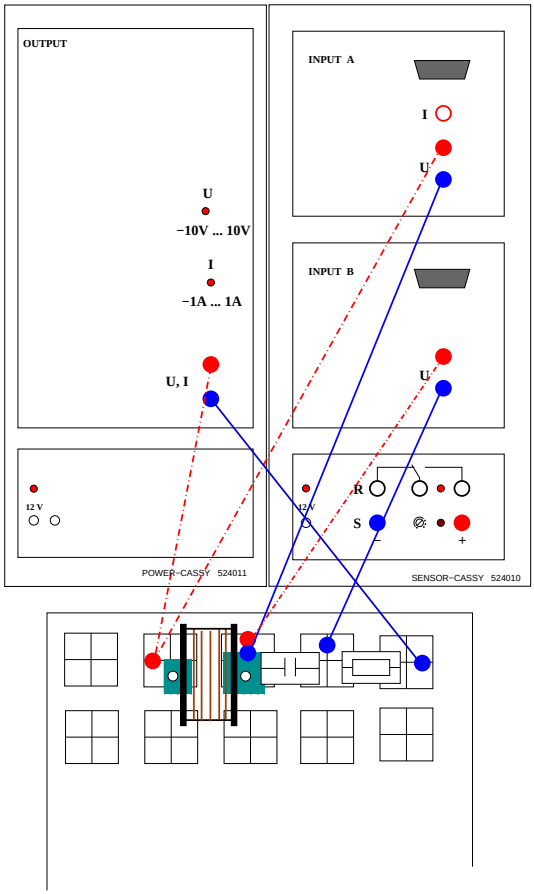
2.) Bestimmung aus der Phasenverschiebung als Funktion der Frequenz: Bei der Resonanzfrequenz ist $\phi = 0$ und Δf liegt zwischen den Winkeln $\phi = \pm\, 45^0$.

3.) Aus der Spannungsüberhöhung an der Resonanzstelle (siehe Gleichung 4.10).

4.) Durch Berechnung aus den Werten für R, C und L. Falls der Ohmsche Spulenwiderstand nicht vernachlässigt werden darf, muss er zum eventuell vorhandenen separaten Ohmschen Widerstand hinzuaddiert werden.

Versuchsaufbau

Eine Spule (z.B. 500 Windungen), ein Kondensator (z.B. 2,2 μF) und ein Ohmscher Widerstand (z.B. 1 Ω) werden gemäß Abbildung 4.10 auf der Rastersteckplatte in Serie geschaltet und an eine Wechselspannung gelegt. Als Spannungsquelle dient die Wechselspannungsquelle des POWER-CASSY-Interfaces, das sowohl die anliegende Wechselspannung als auch den Gesamtstrom im



Benötigte Geräte:

1	Power-Cassy
1	Sensor-CASSY
1	CASSY Lab
1	Rastersteckplatte, DIN A4
1	STE Widerstand 1 Ω
1	STE Widerstand 5,1 Ω
1	STE Widerstand 10 Ω
1	STE Widerstand 20 Ω
1	STE Widerstand 47 Ω
1	Spule 250 Windungen
1	Spule 500 Windungen
1	Spule 1000 Windungen
1	STE Kondensator 4,7 μ F
1	STE Kondensator 10 μ F
3	Paar Kabel, 50 cm rot/blau

Abbildung 4.10: Versuchsaufbau zum R-L-C-Serienschwingkreis

Kreis angibt. Der Spannungsabfall an der Spule wird mit dem Spannungsmessgerät (Eingang A) und der Spannungsabfall am Kondensator mit dem Spannungsmessgerät (Eingang B) des SENSOR-CASSY-Interfaces gemessen.

Versuchsdurchführung/-auswertung

Messen Sie die Spannungsabfälle an der Spule und dem Kondensator, die anliegende Spannung und den im Kreis fließenden Strom als Effektivwerte!
Der Funktionsgenerator POWER-CASSY kann verschiedenartige Wechselspannungen mit bis zu ± 10 V Amplituden und mit variablen Frequenzen liefern. In dem Dialogfenster **Einstellungen Funktionsgenerator** des POWER-CASSY wird zuerst die Stellgröße, der Stellbereich und der Messbereich festgelegt, die Art der Signalform (Sinus-, Rechteck, Sägezahnverlauf etc.) und deren Parameter (Frequenz, Amplitude der Wechselspannung **Vp**, Gleichspannungsoffset **V=** und Symmetrie der Signalform in Prozent), sowie die Messwerterfassung. Stellen Sie eine sinusförmige Wechselspannung mit einer Amplitude von z.B. 3 V ein. Messen Sie die Spannungsabfälle am Kondensator und an der Spule, sowie den Strom im Kreis (Abb. 4.10).
Achtung: Es werden nur dann Effektivwerte von den Messgeräten gemessen, wenn in den **Einstellungen: Messparameter anzeigen** die Intervallzeit auf 100 ms und die Anzahl auf 0

gesetzt werden!

Zur Variation der Frequenz kann im Menü Einstellungen bei **Parameter/Formel/FFT** die Frequenz f_1 als Formel definiert werden, allerdings müssen alle verwendeten Parameter in der Formel vorher definiert worden sein: $f_1 = f_0 + (n-1) * 20$ mit f_0 =Startfrequenz.
Dies bewirkt eine schrittweise Erhöhung der Startfrequenz f_0 um 20 Hz bis zur maximal vorgegebenen Frequenz, wenn bei **Einstellungen Funktionsgenerator** bei Parameter anstatt z.B. 1000 Hz das vorher definierte Symbol f_1 eingegeben wird. Allerdings erlaubt dies nicht eine genauere Vermessung der Kurve im Bereich der Resonanz. Ausserhalb der Resonanz wären so kleine Frequenzerhöhungsschritte unnötig genau. Daher hat Leybold eine Funktion zur schrittweisen Erhöhung der Frequenz vorgeschlagen, die den oben genannten Punkten Rechnung trägt. Im Menü **Einstellungen** bei **Parameter/Formel/FFT** muß eine neue Größe, eine **Frequenz** f_2, ausgewählt werden als **Formel**

$$f_0 + (t <> 0 \; and \; n <> 1) * (f_R - f_0) * (1 + sgn(last\ n - n_0) * (10 \wedge (abs(last\ n - n_0)/n_0) - 1)/9)$$

Symbol : f_2 Einheit : Hz von : 0 Hz bis : 5000 Hz Dezimalstellen : 0

mit den vorher zu definierenden neuen Größen als **Parameter**:
Anzahl: $n_0 = 15$
Startfrequenz $f_0 = 10$ Hz
Resonanzfrequenz f_R

So wird die Frequenz f_2 automatisch in kleinen Schritten erhöht. Die Schrittweite ist variabel und richtet sich nach den Vorgaben für die Anzahl n_0, die Startfrequenz f_0 und die ungefähre Resonanzfrequenz f_R, die sich aus den verwendeten Bauteilen berechnen lässt. Zwischen den beiden Frequenzen f_0 und f_R werden n_0 Messwerte aufgenommen. Danach wird die Frequenz f_2 noch weiter erhöht und zwar so, dass um $f_2 = f_R$ die Werte besonders dicht aufgenommen werden. Dadurch reduziert sich die erforderliche Messzeit erheblich im Vergleich zu äquidistanten Frequenzschritten. Die Vorgaben können durch Schieben der Zeiger mit der Maus oder durch Ändern des Parameterwertes nach Anklicken mit der rechten Maustaste geändert werden.

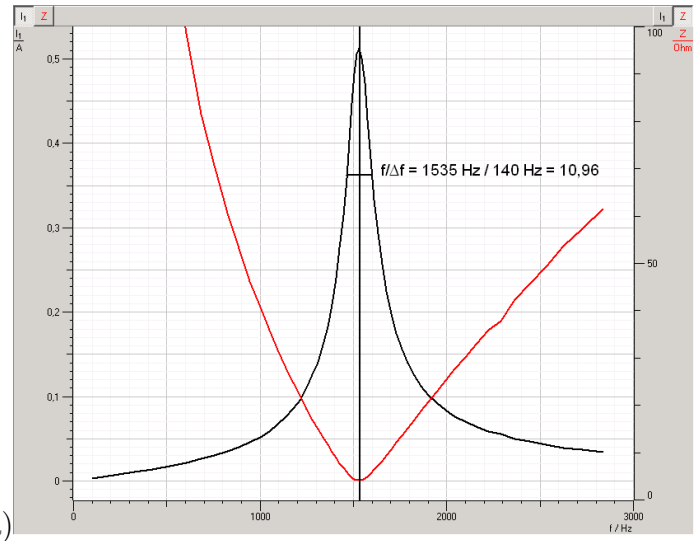
Zusätzlich muß bei **Einstellungen Messparameter anzeigen** eine Messbedingung vorgegeben werden, die eine Messwertaufnahme bis 5 kHz (oder der 5-fachen Resonanzfrequenz) begrenzt, aber frühestens nach $2/f_2 + 2$ s nach einer Frequenzerhöhung (Einschwingzeit) den Messwert aufnimmt:

$$f_2 < 5 * f_R \; and \; f_2 < 5000 \; and \; delta\ t > 2/f_2 + 2$$

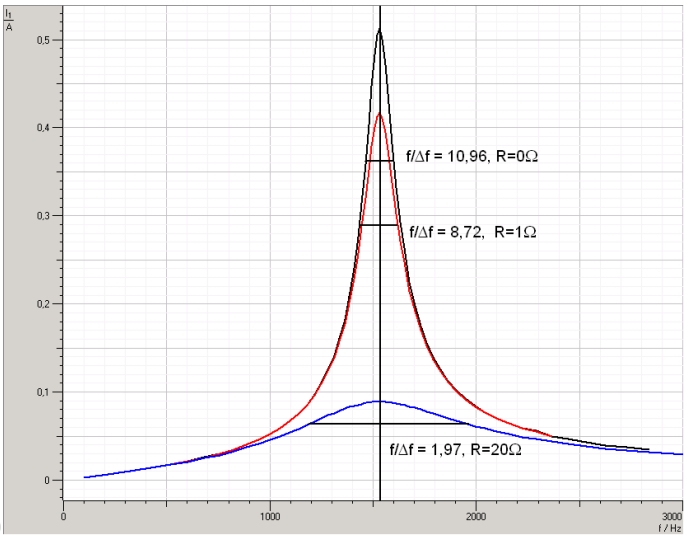
Damit nun die Resonanzkurven aufgenommen werden können, muß bei **Einstellungen Funktionsgenerator** bei Parameter für die Frequenz dann f_2 eingegeben werden.
Messungen der Impedanz Z (in CASSY als Formel definieren!), des Stromes I, der Phasenverschiebung ϕ und der Spannungsüberhöhung als Funktion der Frequenz mit verschiedenen Dämpfungen sind in Abbildungen 4.11a-d) gezeigt. Die Lage der Resonanzfrequenz, die Breite der Resonanzkurve können mit dem Auge bzw. Hilfslinien bestimmt und der Ablesefehler abgeschätzt werden.

Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit den Erwartungen aufgrund der Voruntersuchungen und fassen Sie ihre Ergebnisse in einer Tabelle oder Graphik zusammen.

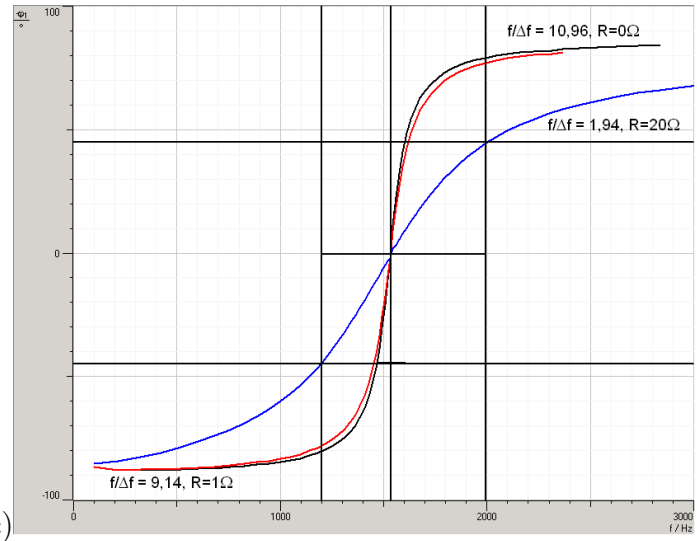
a)



b)



c)



d)

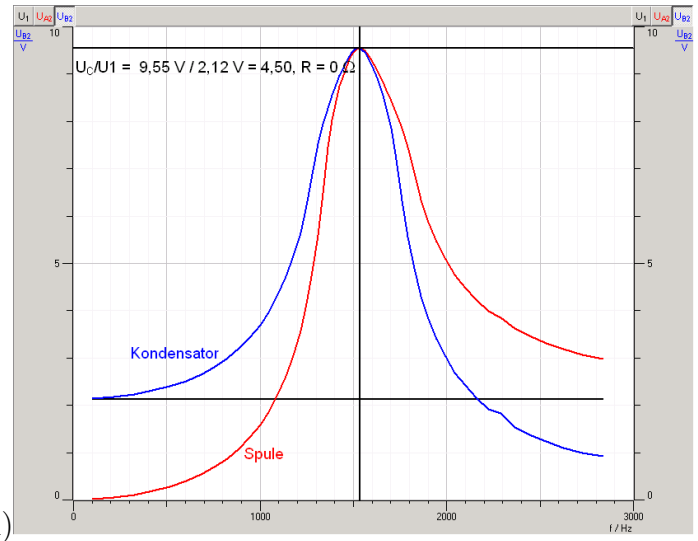


Abbildung 4.11: a) Messung der Resonanzkurven $I(f)$ und $Z(f)$ eines Serienschwingkreises mit einer Spule mit 500 Windungen, mit einem Kondensator (2,2 μF) und b) verschiedenen Ohmschen Widerständen, c) Phasenverschiebung und d) Spannungsüberhöhung.

4.3.2 Parallelschwingkreis von L, R und C

Bei der Parallelschaltung einer Spule, eines Kondensators und eines Ohmschen Widerstandes (Abbildung 4.12a) liegt an allen Widerständen die gleiche Spannung $U_\sim = U_0 \cdot e^{i\omega t}$ an.
Nach der Knotenregel teilt sich der von der angelegten Spannung ausgehende Gesamtstrom I in die Anteile I_R durch den Ohmschen Widerstand R, I_C durch die Kapazität C und I_L durch die Induktivität L auf:

$$I \;=\; I_R \;+\; I_C + \; I_L \tag{4.11}$$

Die Addition muß unter Beachtung der Phasenverschiebungen der einzelnen Ströme erfolgen. Wegen Gleichung 4.11 gilt:

$$\frac{U_\sim}{Z} = \frac{U_\sim}{R} + i\omega C \cdot U_\sim + \frac{U_\sim}{i\omega L} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

Bei Parallelschaltung addieren sich also die inversen Widerstände zur inversen Impedanz. Statt der Widerstände benutzt man daher oft auch direkt die sogenannten **Leitwerte**, die inversen Widerstände: Der Wirkanteil heißt **Konduktanz**, der Blindanteil **Suszeptanz** und der Scheinanteil **Admittanz**.

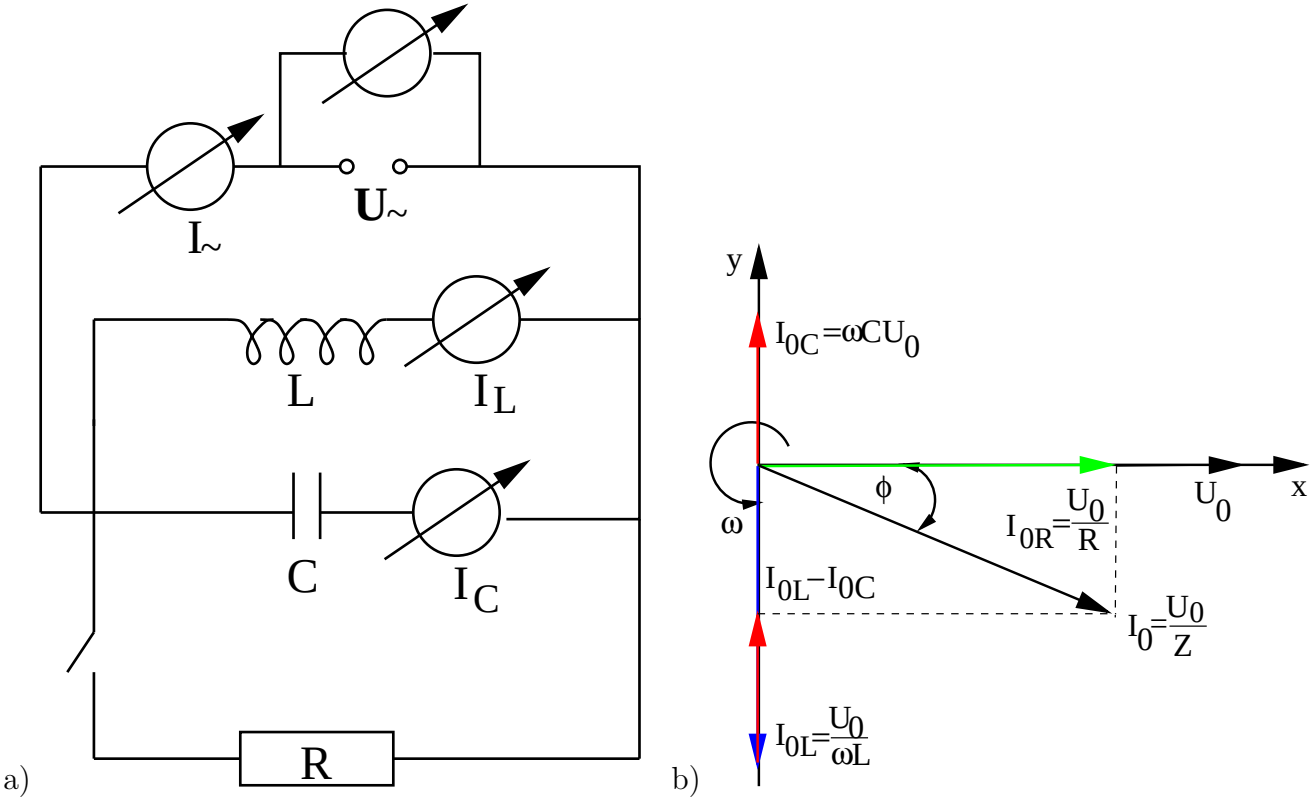


Abbildung 4.12: a) Schaltbild eines L,R und C Parallelschwingkreises, b) Zeigerdarstellung

In komplexer Schreibweise gilt:

Widerstände		Leitwerte
$X_R = R$		$Y_R = \frac{1}{R}$
$X_L = R_L + i\omega L$	(4.12)	$Y_L = \frac{R_L - i\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2}$
$X_C = \frac{1}{i\omega C}$		$Y_C = i\omega C$

In Gleichung 4.12 wurde berücksichtigt, dass Spulen auch einen Ohmschen Anteil R_L haben. Der gesamte komplexe Leitwert ist:

$$Y = Y_R + Y_L + Y_C = \frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} + i(\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2}) \tag{4.13}$$

und der Betrag des Gesamtleitwertes beträgt:

$$Y = \sqrt{\left[\frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2}\right]^2 + \left[\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2}\right]^2}$$

Gesamtimpedanz

Die Impedanz für einen Parallelschwingkreis berechnet sich wie folgt:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{X_R} + \frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C} = \frac{X_L X_C + X_R X_C + X_R X_L}{X_R X_L X_C} \quad \rightarrow \quad Z = \frac{X_R X_L X_C}{X_L X_C + X_R X_C + X_R X_L}$$

Nach einiger Rechnerei findet man für die (komplexe) Impedanz:

$$Z = \frac{R \cdot (\frac{L}{C})^2 + \frac{RR_L \cdot (R+R_L)}{(\omega C)^2} - i\left[\frac{(RR_L)^2}{\omega C} + R^2 \frac{L}{C} \cdot (\omega L - \frac{1}{\omega C})\right]}{(\frac{L}{C} + RR_L)^2 + (R \cdot \omega L - \frac{R+R_L}{\omega C})^2}$$

Resonanzfrequenz:

Aus dem komplexen Leitwert der Gleichung 4.13 lässt sich die Resonanzfrequenz berechnen, indem der Imaginärteil zu null gesetzt wird:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1 - \frac{C}{L} \cdot R_L^2}{LC}}$$

Man erkennt unmittelbar, dass sich für $R_L = 0$ die schon vom Serienkreis her bekannte Resonanzfrequenz ergibt:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \tag{4.14}$$

Für ω_0 wird der Leitwert minimal und damit die Impedanz maximal, im Gegensatz zum Serienschwingkreis. Der Strom kann praktisch nur noch durch den Ohmschen Widerstand fließen. Der

LC-Schwingkreis bedeutet für den Strom einen unendlich großen Widerstand. Wegen $R_L \neq 0$ sperrt das LC-Glied nicht vollständig.

Der gesamte zum RLC-Schwingkreis hinfließende Strom beträgt:

$$I = Y \cdot U_\sim = \left(\left[\frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right] + i \left[\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right] \right) \cdot U_0 \cos \omega t$$

Damit folgt:

$$I = I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi_I)} \quad \text{mit} \quad I_0 = \sqrt{\left[\frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right]^2 + \left[\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right]^2} \cdot U_0$$

und

$$\tan \phi_I = - \frac{\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2}}{\frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2}} \tag{4.15}$$

Stromresonanz

Ähnlich wie die Spannungsresonanz bei Serienschwingkreisen kann beim Parallelschwingkreis eine Stromresonanz auftreten, die insbesondere bei hoher Frequenz gefährlich werden kann. Betrachtet sei der einfachere Fall, bei dem nur eine Spule und ein Kondensator parallel geschaltet sind. Dann gilt für den Strom durch die Spule:

$$I_L = \frac{U_0}{\sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2}} \cdot e^{i(\omega t - \phi_L)}$$

Die Ströme durch Kondensator und Spule haben im Grenzfall $R_L \to 0$ eine Phasenverschiebung von 180^0 zueinander. Die Summe beider Ströme ergibt den resultierenden Strom:

$$I = I_o \cdot e^{i(\omega t - \phi_I)}$$

mit der Phasenverschiebung ϕ_I aus Gleichung 4.15. Die Impedanz berechnet sich zu:

$$Z = \frac{1}{\omega C} \cdot \sqrt{\frac{R_L^2 + (\omega L)^2}{R_L^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{4.16}$$

Für die Resonanzfrequenz von Gleichung 4.14 werden induktiver und kapazitiver Widerstand gleich groß und damit heben sich die beiden Ströme auf. Dann wird die Impedanz (Gleichung 4.16) des Schwingkreises (praktisch) unendlich groß. Der Strom in den Zuleitungen wird null, während im Schwingkreis ein beträchtlicher Strom pulsieren kann. Dies ist der Fall der Stromresonanz. In diesem Fall stellt der Schwingkreis also einen unendlich großen Widerstand dar und sperrt den Stromfluss in den Zuleitungen vollständig.

Stromresonanz erreicht man, wenn R_L gegen ωL vernachlässigt werden kann, also für hohe Frequenzen. Dann gilt mit Gleichung 4.16 und vernachlässigbarem R_L bei Resonanz ($\omega_0 L = 1/(\omega_0 C)$):

$$Z_{res} = \frac{1}{\omega_0 C} \cdot \frac{\omega_0 L}{R_L} = \frac{L}{C R_L}$$

Damit folgt für die Stromüberhöhung:

$$\frac{(I_L)_0}{I_0} = \frac{(I_C)_0}{I_0} = \frac{U_0}{\omega_0 L} \cdot \frac{Z_{res}}{U_0} = \omega_0 C \cdot Z_{res} = \frac{1}{\omega_0 C R_L} = \frac{\omega_0 L}{R_L} = \frac{1}{R_L} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.17)$$

Die Stromüberhöhumg hat ungefähr die gleiche Größe wie die Spannungsüberhöhung nach Gleichung 4.10. Die Gleichung 4.17 gibt die Güte für einen LC-Parallelschwingkreis an.

Güte bei Parallelschaltung

R, L und C seien parallelgeschaltet und die Verluste in Spule und Kondensator seien im Ohmschen Widerstand berücksichtigt (bzw. vernachlässigbar!). Wie beim Serienschwingkreis ist die Güte definiert durch die Form der Resonanzkurve. Bei konstanter angelegter Spannung wird bei der Resonanzfrequenz der zum Schwingkreis hinfließende Strom minimal. Daher findet man die Breite der Resonanzkurve zwischen den Frequenzen, bei denen der Strom die Werte $\sqrt{2} \cdot I_{min}$ annimmt. Man kann die Güte auch über die Stromüberhöhung definieren. Eine genaue Rechnung liefert für die Güte des Parallelschwingkreises:

$$Q_P = \frac{R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}}{1 + R \cdot R_L \cdot \frac{C}{L}} \quad (4.18)$$

Für kleine Werte von R gilt:

$$Q_P = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{R}{\omega_0 L} = R \cdot \omega_0 C = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (4.19)$$

und für große Werte von R:

$$Q_P = \frac{1}{R_L} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.20)$$

Messung der Güte:

1.) Durch Messung von Resonanzfrequenz und Breite der Resonanzkurve.

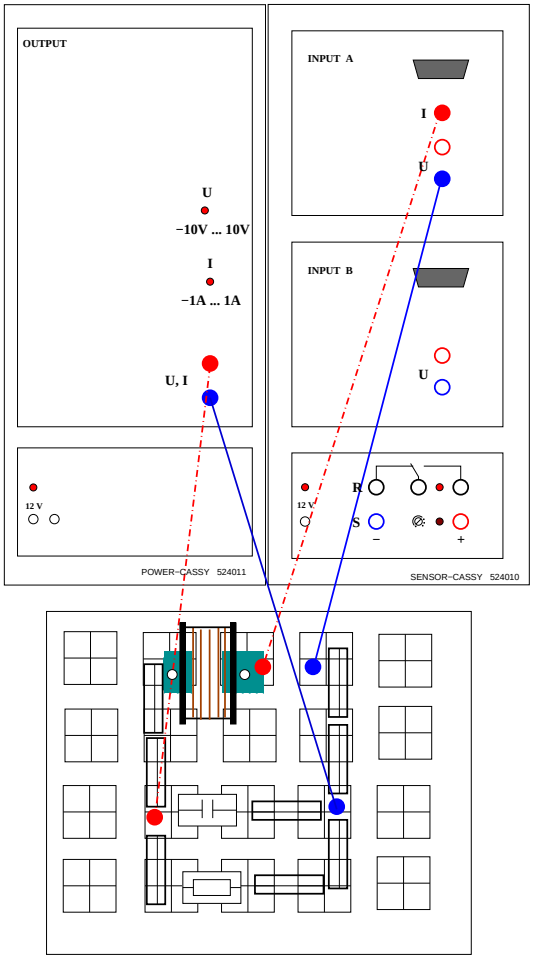
2.) Aus der Stromüberhöhung an der Resonanzstelle nach Gleichung 4.17.

3.) Durch Berechnung aus den Komponenten des Schwingkreises.

Versuchsaufbau

Eine Spule (z.B. 500 Windungen), ein Kondensator (z.B. 2,2 μF) und ein Ohmscher Widerstand (z.B. 1 Ω) werden gemäß Abbildung 4.13 auf der Rastersteckplatte parallel geschaltet und an Wechselspannung gelegt. Als Spannungsquelle dient die Wechselspannungsquelle des POWER-CASSY-Interfaces, das sowohl die anliegende Wechselspannung als auch den Gesamtstrom im Kreis angibt. Der Strom durch die Spule oder durch den Kondensator wird mit dem Strommessgerät (Eingang A) des SENSOR-CASSY-Interfaces gemessen.

a)



Benötigte Geräte:

1	Power-Cassy
1	Sensor-CASSY
1	CASSY Lab
1	Rastersteckplatte, DIN A4
1	STE Widerstand 1 Ω
1	STE Widerstand 5,1 Ω
1	STE Widerstand 10 Ω
1	STE Widerstand 20 Ω
1	STE Widerstand 47 Ω
1	Spule 250 Windungen
1	Spule 500 Windungen
1	Spule 1000 Windungen
1	STE Kondensator 4,7 μ F
1	STE Kondensator 10 μ F
3	Paar Kabel, 50 cm rot/blau

Abbildung 4.13: Versuchsaufbau zum *R-L-C*-Parallelschwingkreis

Versuchsdurchführung/-auswertung

Messen Sie den Gesamtstrom I im Kreis und die in den Einzelkreisen fließenden Ströme als Effektivwerte!.
Der Funktionsgenerator POWER-CASSY kann verschiedenartige Wechselspannungen mit bis zu $\pm$ 10 V Amplituden und mit variablen Frequenzen liefern. In dem Dialogfenster **Einstellungen Funktionsgenerator** des POWER-CASSY wird zuerst die Stellgröße, der Stellbereich und der

Messbereich festgelegt, die Art der Signalform (Sinus-, Rechteck, Sägezahnverlauf etc.) und deren Parameter (Frequenz, Amplitude der Wechselspannung **Vp**, Gleichspannungsoffset **V=** und Symmetrie der Signalform in Prozent), sowie die Messwerterfassung. Stellen Sie eine sinusförmige Wechselspannung mit einer Amplitude von z.B. 3 V ein.
Achtung: Es werden nur dann Effektivwerte von den Messgeräten gemessen, wenn in den **Einstellungen: Messparameter anzeigen** die Intervallzeit auf 100 ms und die Anzahl auf 0 gesetzt werden!

Zur Variation der Frequenz kann im Menü Einstellungen bei **Parameter/Formel/FFT** die Frequenz f_1 als Formel definiert werden, allerdings müssen alle verwendeten Parameter in der Formel vorher definiert worden sein: $f_1 = f_0 + (n-1) * 20$ mit f_0 =Startfrequenz.
Dies bewirkt eine schrittweise Erhöhung der Startfrequenz f_0 um 20 Hz bis zur maximal vorgegebenen Frequenz, wenn bei **Einstellungen Funktionsgenerator** bei Parameter anstatt z.B. 1000 Hz das vorher definierte Symbol f_1 eingegeben wird. Allerdings erlaubt dies nicht eine genauere Vermessung der Kurve im Bereich der Resonanz. Ausserhalb der Resonanz wären so kleine Frequenzerhöhungsschritte unnötig genau. Daher hat Leybold eine Funktion zur schrittweisen Erhöhung der Frequenz vorgeschlagen, die den oben genannten Punkten Rechnung trägt. Im Menü **Einstellungen** bei **Parameter/Formel/FFT** muß eine neue Größe, eine **Frequenz** f_2, ausgewählt werden als **Formel**

$$f_0 + (t <> 0 \; and \; n <> 1) * (f_R - f_0) * (1 + sgn(last\ n - n_0) * (10 \wedge (abs(last\ n - n_0)/n_0) - 1)/9)$$

Symbol : f_2 Einheit : Hz von : 0 Hz bis : 5000 Hz Dezimalstellen : 0

mit den vorher zu definierenden neuen Größen als **Parameter**:
Anzahl: $n_0 = 15$
Startfrequenz $f_0 = 10$ Hz
Resonanzfrequenz f_R

So wird die Frequenz f_2 automatisch in kleinen Schritten erhöht. Die Schrittweite ist variabel und richtet sich nach den Vorgaben für die Anzahl n_0, die Startfrequenz f_0 und die ungefähre Resonanzfrequenz f_R, die sich aus den verwendeten Bauteilen berechnen lässt. Zwischen den beiden Frequenzen f_0 und f_R werden n_0 Messwerte aufgenommen. Danach wird die Frequenz f_2 noch weiter erhöht und zwar so, dass um $f_2 = f_R$ die Werte besonders dicht aufgenommen werden. Dadurch reduziert sich die erforderliche Messzeit erheblich im Vergleich zu äquidistanten Frequenzschritten. Die Vorgaben können durch Schieben der Zeiger mit der Maus oder durch Ändern des Parameterwertes nach Anklicken mit der rechten Maustaste geändert werden.

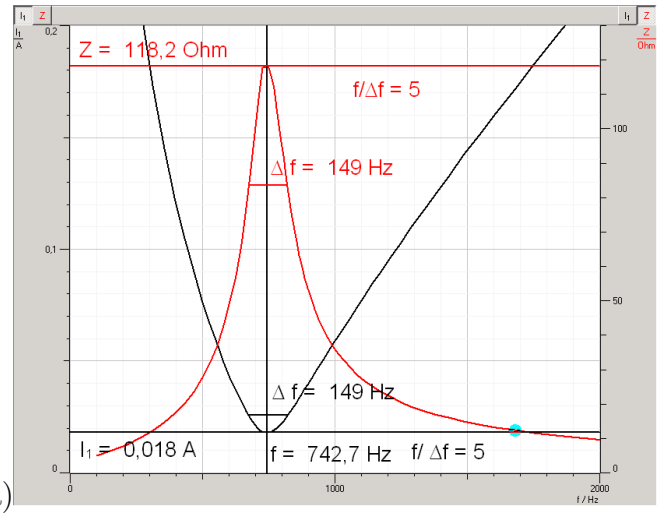
Zusätzlich muß bei **Einstellungen Messparameter anzeigen** eine Messbedingung vorgegeben werden, die eine Messwertaufnahme bis 5 kHz (oder der 5-fachen Resonanzfrequenz) begrenzt, aber frühestens nach $2/f_2 + 2$ s nach einer Frequenzerhöhung (Einschwingzeit) den Messwert aufnimmt:

$$f_2 < 5 * f_R \; and \; f_2 < 5000 \; and \; delta\ t > 2/f_2 + 2$$

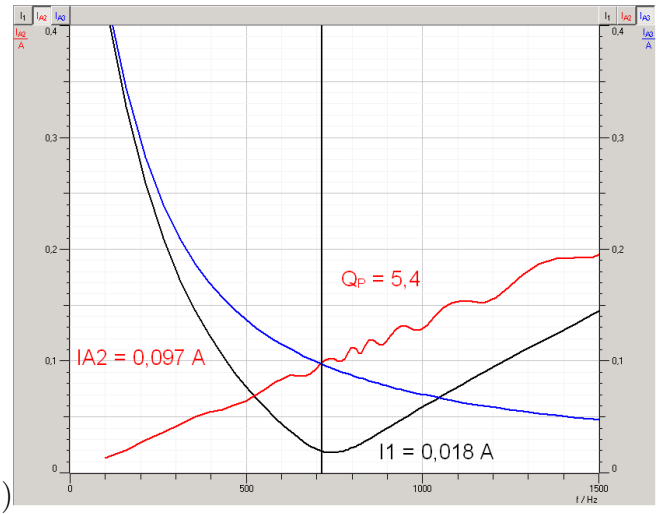
Damit nun die Resonanzkurven aufgenommen werden können, muß bei **Einstellungen Funktionsgenerator** bei Parameter für die Frequenz dann f_2 eingegeben werden.

Messungen der Impedanz Z (in CASSY als Formel definieren!), des Gesamtstromes I, der Phasenverschiebung ϕ und der Stromüberhöhung als Funktion der Frequenz sind in den Abbildungen 4.14a-c) gezeigt. Die Lage der Resonanzfrequenz, die Breite der Resonanzkurve und die Stromüberhöhungen können mit dem Auge bzw. Hilfslinien bestimmt und die Ablesefehler abgeschätzt werden.
Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit den Erwartungen aufgrund der Voruntersuchungen und fassen Sie ihre Ergebnisse in einer Tabelle oder Graphik zusammen.

a)



b)



c)

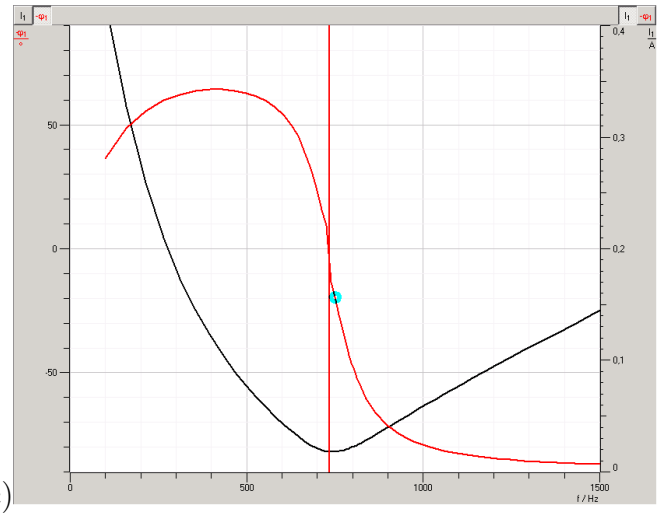


Abbildung 4.14: Messung der a) Resonanzkurven $I(f)$ und $Z(f)$, b) der Phasenverschiebung und c) der Stromüberhöhungen eines Parallelschwingkreises mit einer Spule mit 500 Windungen und einem Kondensator mit 4,7 μF.